ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di Matematica e Fisica

Sessione ordinaria 2019 - Seconda prova scritta

Quesiti

Quesito 1

Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{x^2+d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $\dfrac{12}{5}$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x=3$, $x=-3$ e $y=5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f.

Soluzione

Definiamo la funzione $f(x)$ data:

$f(x) := \dfrac{p(x)}{x^2+d}$

$$x \to \frac{p(x)}{x^2+d} \tag{1.1}$$

Per determinare i suoi punti di massimo e minimo determiniamo, tramite le condizioni date, i valori di d e $p(x)$.

Sappiamo che la funzione interseca l'asse x nei punti $x=0$ e $x=\dfrac{12}{5}$, quindi il polinomio $p(x)$ può essere fattorizzato come:

$p(x) := x \cdot (5\,x - 12) \cdot q(x)$

$$x \to x\,(5\,x-12)\,q(x) \tag{1.2}$$

dove $q(x)$ è un opportuno polinomio da determinare.

Dal momento che la funzione f ha due asintoti verticali in $x = 3$ e $x = -3$, questo significa che il suo denominatore si annulla in 3 e in -3.
Possiamo quindi imporre che:
$x^2 + d = (x-3)\cdot(x+3)$

$$x^2 + d = (x-3)\ (x+3) \tag{1.3}$$

Risolviamo l'equazione per trovare il valore di d :
$d := solve\left(x^2 + d = (x-3)\cdot(x+3), d\right)$

$$-9 \tag{1.4}$$

Il fatto che la retta $y = 5$ è un asintoto orizzontale per la funzione f significa che:
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 5$
Poniamo $s = q(x)$ e calcoliamo:
$\lim_{x \to \text{infinity}} \frac{x\ (5\ x - 12)}{x^2 - 9} \cdot s$

$$5\ s \tag{1.5}$$

Dal momento che questo limite dev'essere uguale a 5 otteniamo:
$solve(5\cdot s = 5)$

$$1 \tag{1.6}$$

otteniamo quindi che
$q(x) := 1$

$$x \rightarrow 1 \tag{1.7}$$

Abbiamo quindi trovato che la funzione f è la seguente:
$f(x)$

$$\frac{x\ (5\ x - 12)}{x^2 - 9} \tag{1.8}$$

Per studiare i suoi massimi e minimi calcoliamo la derivata prima:
$simplify(diff(f(x), x))$

$$\frac{6\ \left(2\ x^2 - 15\ x + 18\right)}{\left(x^2 - 9\right)^2} \tag{1.9}$$

e ne studiamo il segno:
$solve(diff(f(x), x) \geq 0, x)$

$$RealRange(-\infty, Open(-3)), RealRange\left(Open(-3), \frac{3}{2}\right), RealRange(6, \infty) \tag{1.10}$$

Perciò la funzione ha un punto di massimo relativo in $x = \frac{3}{2}$ e un punto di minimo relativo in $x = 6$.

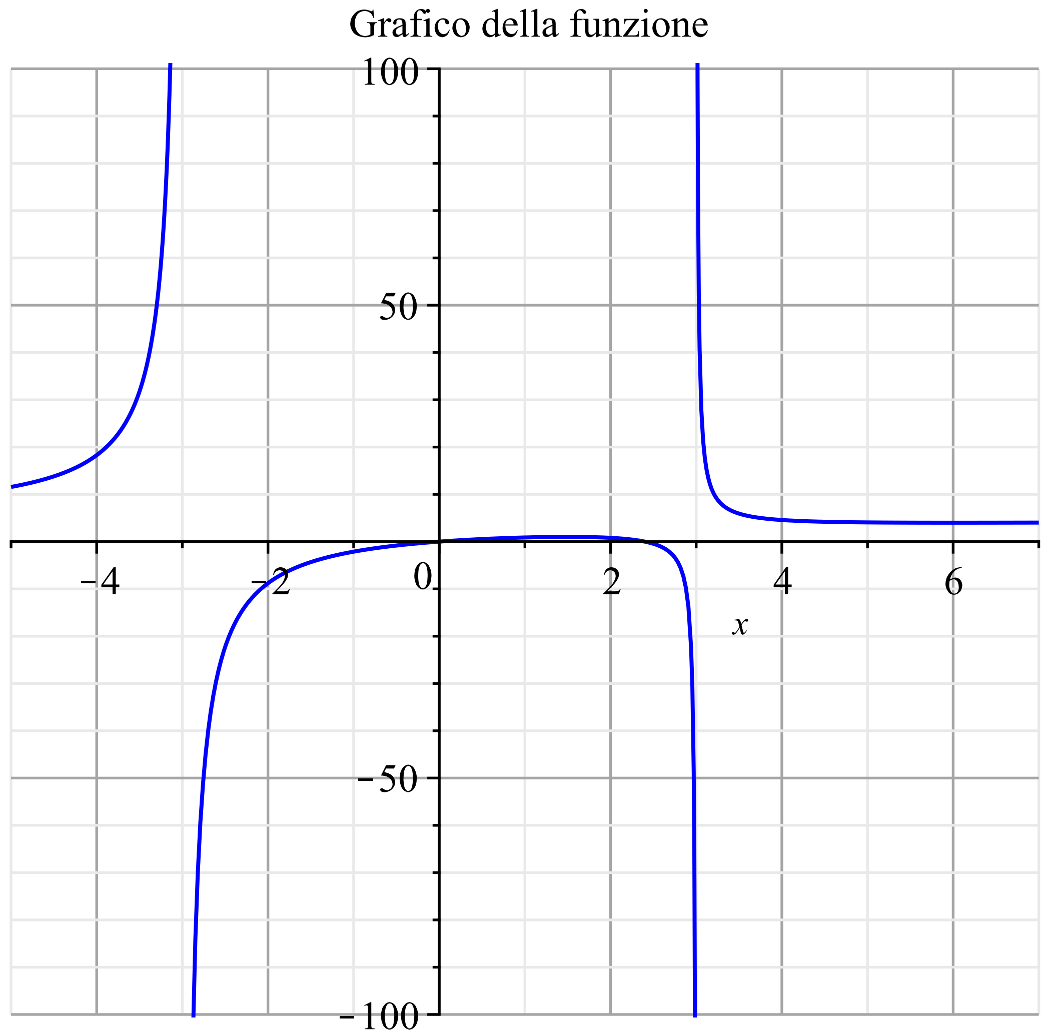
Calcoliamo le ordinate corrispondenti:
$f\left(\frac{3}{2}\right)$

$$1 \tag{1.11}$$

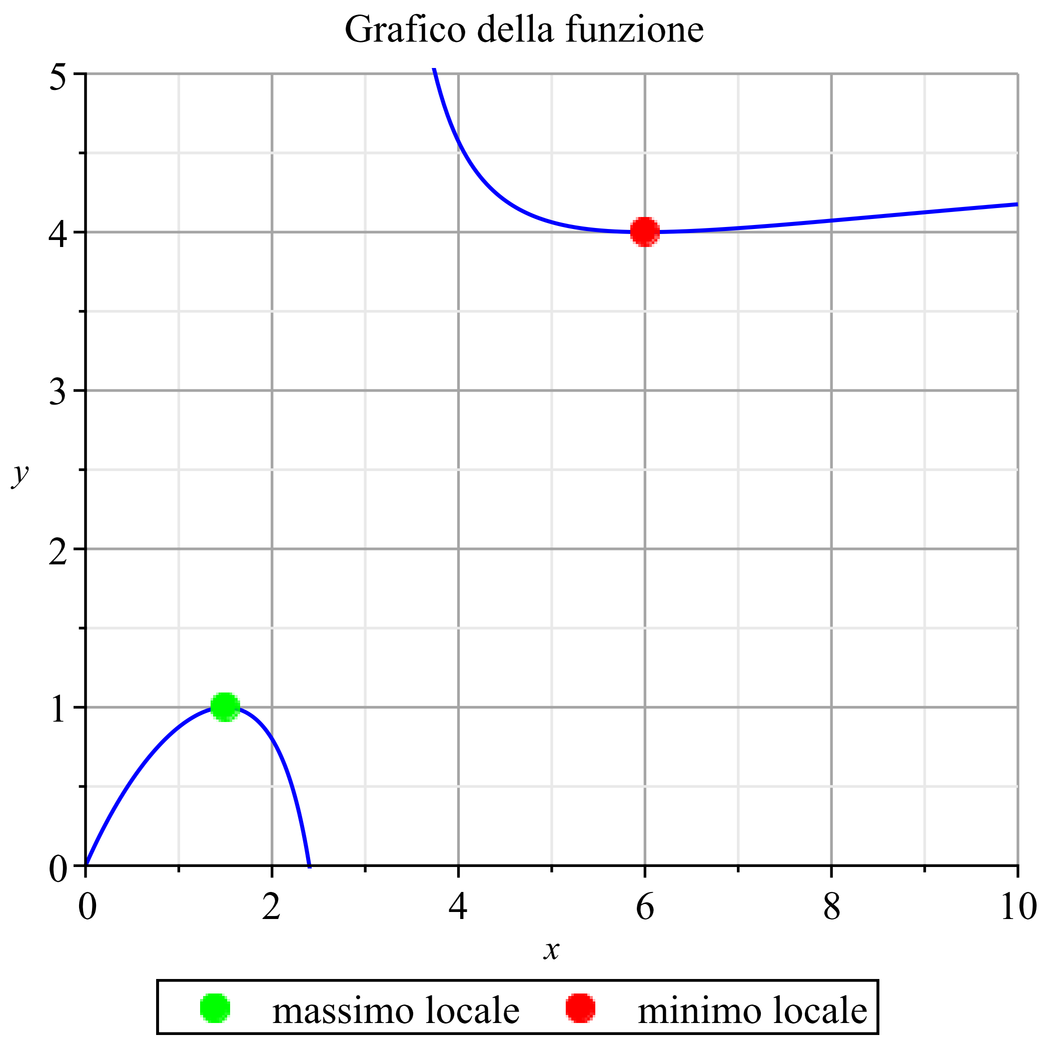
$f(6)$

$$4 \tag{1.12}$$

Possiamo verificare la soluzione tracciando il grafico della funzione.



Concentriamoci sulla visualizzazione del grafico nei punti di massimo e minimo locali:



Quesito 2

È assegnata la funzione $g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1}$.

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^{x}}$.

Soluzione

Data la funzione:

$g(x) := \sum_{n=1}^{1010} x^{(2n-1)}$

$$x \to \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} \tag{2.1}$$

Calcoliamo gli zeri di $g(x)$:

$fsolve(g(x) = 0)$

$$0. \tag{2.2}$$

Abbiamo trovato un unico zero.
Si poteva evincere anche dal fatto che:

$$g(x) = x + x^3 + \ldots + x^{2019} = x \cdot \left(1 + x^2 + \ldots + x^{2018}\right) = 0$$

$g(x)$ si annulla quando $x = 0$ oppure $\left(1 + x^2 + \ldots + x^{2018}\right) = 0$
La prima equazione ha come unica soluzione 0, mentre la seconda equazione è impossibile, poiché il polinomio è sempre strettamente maggiore di 0 per ogni x $\in$ R, in quanto somma di quadrati più uno.

Quindi esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g\left(x_0\right) = 0$ e in particolare $x_0 = 0$.

Determiniamo il valore del limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{1,1^x}$

$limit\left(\dfrac{g(x)}{1.1^x}, x = \text{infinity}\right)$

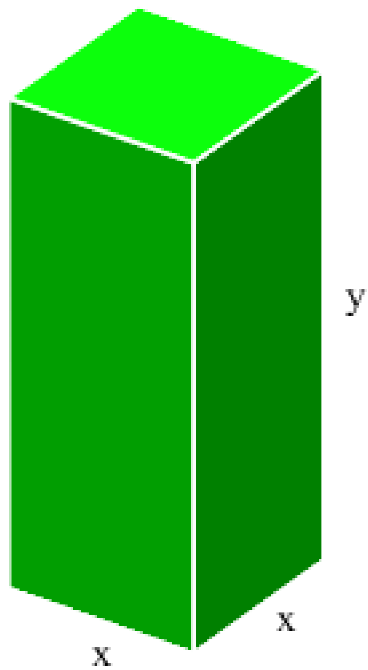
$$0. \tag{2.3}$$

Quesito 3

Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area *S*, determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

Soluzione

restart :
plots:-*display*(*plottools*:-*parallelepiped*([2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 5], *color* = *green*), *plots*:-*textplot3d*({[1, -0.3, 0, "x"], [0, 1, -0.3, "x"], [2.5, 0, 2.5, "y"], [0, 1, -0.3, "x"]}), *orientation* = [-145, 60], *axes* = *none*, *scaling* = *constrained*)



Sia x il lato del quadrato di base e y l'altezza del parallelepipedo.
La superficie totale del parallelepipedo è:
$S = 2\,x^2 + 4 \cdot y \cdot x$

$$S = 2\,x^2 + 4\,x\,y \tag{3.1}$$

dalla quale ricaviamo:
$y := \dfrac{\left(S - 2 \cdot x^2\right)}{4 \cdot x}$

$$\frac{1}{4}\,\frac{-2\,x^2 + S}{x} \tag{3.2}$$

Dal momento che $y > 0$ otteniamo che $-2\,x^2 + S > 0$, cioè $-\sqrt{\dfrac{S}{2}} \le x \le \sqrt{\dfrac{S}{2}}$

Da questo ricaviamo:
$0 < x < \dfrac{\sqrt{2\,S}}{2}$
Vogliamo rendere minima la somma delle lunghezze degli spigoli ovvero
$L := 8\,x + 4\,y$

$$8\,x + \frac{-2\,x^2 + S}{x} \tag{3.3}$$

in cui abbiamo sostituito il valore di y ricavato in precedenza. Semplificando:
simplify(L)

$$\frac{6x^2+S}{x} \tag{3.4}$$

Calcoliamo la derivata prima:
simplify$(diff(L, x))$

$$-\frac{-6x^2+S}{x^2} \tag{3.5}$$

Studiamo il segno della derivata, assumendo che la quantità S sia maggiore di zero:
$solve\left(\mathbf{??} - \frac{-6x^2+S}{x^2} \geq 0, x\right)$ assuming $S > 0$

$$\left\{x \leq -\frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{S}\right\}, \left\{\frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{S} \leq x\right\} \tag{3.6}$$

Tenendo conto del fatto che x dev'essere maggiore di zero, notiamo che la derivata di L è negativa nell'intervallo $\left(0, \sqrt{\frac{S}{6}}\right)$ e quindi ha un minimo assoluto in $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$.
Questo valore soddisfa la limitazione su x, infatti:
$is\left(evalf\left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right) < evalf\left(\sqrt{\frac{S}{2}}\right)\right)$ assuming $S > 0$

$$true \tag{3.7}$$

Per $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$ l'altezza del parallelepipedo è
$simplify\left(eval\left(y, x = \sqrt{\frac{S}{6}}\right)\right)$

$$\frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{S} \tag{3.8}$$

Quindi il parallelepipedo cercato è un cubo di spigolo $\frac{\sqrt{6 \cdot S}}{6}$.

Quesito 4

Dati i punti A(2, 0, -1) e B(-2, 2, 1), provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che PA $= \sqrt{2}$ PB, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto T(-10, 8, 7) appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S.

Soluzione

restart :
with$(geom3d)$:
Sia P un punto generico nello spazio di coordinate $P(x, y, z)$.
Definiamo i punti A, B, P e T:
point$(A, 2, 0, -1)$:
point$(B, -2, 2, 1)$:
point(P, x, y, z) :
point$(T, -10, 8, 7)$:
Calcoliamo la distanza del punto P dai punti A e B.

$d_1 := distance(P, A)$

$$\sqrt{(2-x)^2 + y^2 + (-1-z)^2} \qquad \textbf{(4.1)}$$

$d_2 := distance(P, B)$

$$\sqrt{(-2-x)^2 + (2-y)^2 + (1-z)^2} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Imponiamo $PA^2 = 2 \cdot PB^2$, equivalente alla condizione PA=$\sqrt{2}$ PB e otteniamo:

$simplify\left(d_1^2 - 2 \cdot d_2^2 = 0\right)$

$$-x^2 - y^2 - z^2 - 12x + 8y + 6z - 13 = 0 \qquad \textbf{(4.3)}$$

Questa è l'equazione di una superficie sferica che definiamo:

$sphere\left(S, -x^2 - y^2 - z^2 - 12x + 8y + 6z - 13??, [x, y, z]\right)$:

E possiamo ottenere le seguenti informazioni sulla sfera.

$detail(S)$

name of the object	S	
form of the object	$sphere3d$	
name of the center	$center\_S\_1$	
coordinates of the center	$[-6, 4, 3]$	
radius of the sphere	$4\sqrt{3}$	**(4.4)**
surface area of the sphere	192π	
volume of the sphere	$256\pi\sqrt{3}$	
equation of the sphere	$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$	

Verifichiamo che il punto T sia un punto della sfera e quindi che soffisfi la sua equazione:

$IsOnObject(T, S)$

$$true \qquad \textbf{(4.5)}$$

Per trovare il piano tangente alla sfera in T, troviamo il vettore che rappresenta il raggio passante per T.

$TangentPlane(pianotg, T, S)$:

$detail(pianotg)$

```
Warning, assuming that the names of the axes are _x, _y and _z
```

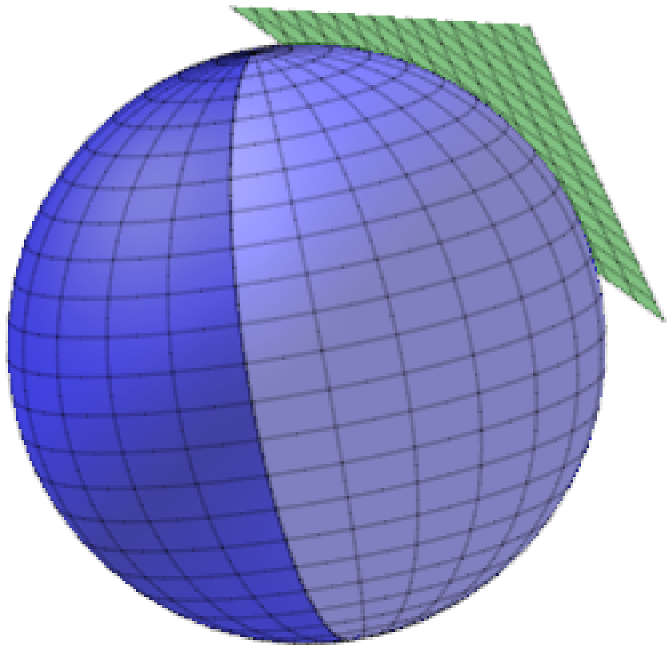
Il piano tangente ha quindi equazione:

$Equation(pianotg, [x, y, z])$

$$100 + 4x - 4y - 4z = 0 \qquad \textbf{(4.6)}$$

Rappresentiamo graficamente la sfera e il piano tangente:

$draw([S(color = blue), pianotg(color = green)], axes = none, transparency = 0.5)$



Quesito 5

Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.
1. Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
2. Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
3. Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

Soluzione

Per il punto (1), osserviamo che nel lancio dei 4 dadi, il numero di possibili configurazioni è dato da 6^4, dove 6 rappresenta il numero di facce di ogni dado e 4 il numero di dadi lanciati. Le uniche configurazioni di quattro dadi, la cui somma non superi 5, sono le seguenti: (1,1,1,1) , (2,1,1,1), (1,2,1,1), (1,1,2,1), (1,1,1,2).

In totale abbiamo pertanto 5 configurazioni sulle 6^4 totali; la probabilità che la somma dei quattro numeri non superi 5 è pertanto pari a :

$$P(S < 5) := \frac{5}{6^4}$$

$$\frac{5}{1296} \qquad \textbf{(5.1)}$$

Il fatto che il prodotto dei numeri usciti sia un multiplo di 3 equivale a dire che almeno uno dei numeri sia 3 o 6. Allora possiamo calcolare il numero di configurazioni tali per cui per ogni dado non escano mai questi numeri, pari a 4^4, la probabilità di tale evento contrario e infine la probabilità dell'evento in questione.

$$p_{non-multiplo} := \frac{4^4}{6^4}$$

$$\frac{16}{81} \tag{5.2}$$

Dunque la soluzione del punto (2) consiste nell'evento complementare, che ha probabilità

$$p_{multiplo} := 1 - p_{non-multiplo}$$

$$\frac{65}{81} \tag{5.3}$$

L'evento che dichiara "il massimo numero uscito sia 4" equivale al fatto che almeno una volta sia uscito 4 e che 5 e 6 non siano mai usciti.
Consideriamo quindi l'evento E_1, corrispondente ad avere un numero minore o uguale a 4:

$$p_{E_1} := \frac{4^4}{6^4}$$

$$\frac{16}{81} \tag{5.4}$$

Consideriamo ora l'evento E_2, corrispondente ad avere un numero minore o uguale a 3:

$$p_{E_2} := \frac{3^4}{6^4}$$

$$\frac{1}{16} \tag{5.5}$$

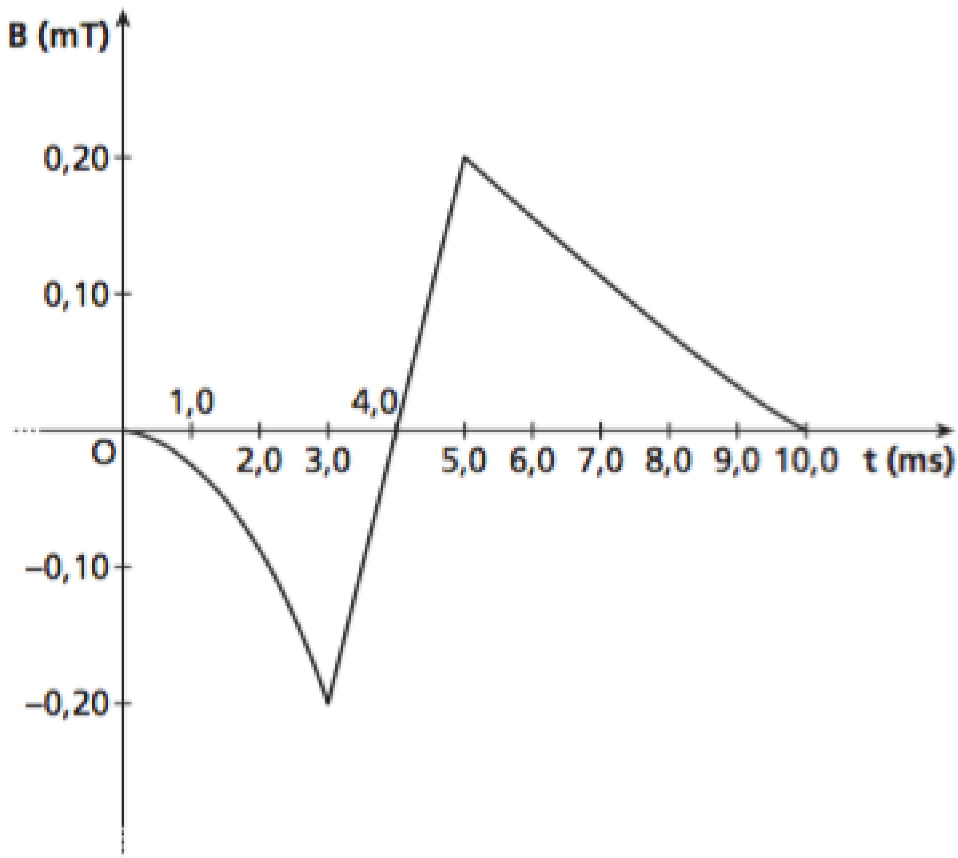
Per calcolare la probabilità di avere come numero massimo 4, è quindi sufficiente calcolare la differenza tra i due valori ottenuti:

$$p_E := p_{E_1} - p_{E_2}$$

$$\frac{175}{1296} \tag{5.6}$$

Quesito 6

Una spira di rame, di resistenza R = 4.0 mΩ, racchiude un'area di 30 cm^2 ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura.



Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:
(a) da 0, 0 ms a 3, 0 ms;
(b) da 3, 0 ms a 5, 0 ms;
(c) da 5, 0 ms a 10 ms

Soluzione

La corrente indotta nella spira è prodotta dalla variazione del flusso del campo magnetico attraverso la superficie Σ della spira:

$$\Phi_\Sigma(t) = \int_\Sigma \boldsymbol{B}(t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

Siccome la superficie della spira rimane costante, la variazione del flusso è causata dalla dipendenza dal tempo del campo magnetico stesso. Per la legge di Faraday-Neumann, poi la variazione del flusso induce una forza elettromotrice

$$\Delta V := -\frac{\partial \Phi_\Sigma(t)}{\partial t}$$

che a sua volta porta con sé una corrente:

$$i = -\frac{1}{R} \cdot \Delta V = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \Phi_\Sigma(t)}{\partial t}$$

Il verso della corrente indotta è tale che il campo magnetico indotto si opponga alla variazione del campo magnetico B che l'ha generata.

Per calcolare la corrente media che passa nella spira tra due istanti di tempo t_1 e t_2, è possibile usare la seguente relazione:

$$i_{t1,t2} := -\frac{1}{R}\cdot\frac{\left(\Phi_2-\Phi_1\right)}{t_2-t_1}$$

$$-\frac{\Phi_2-\Phi_1}{R\left(t_2-t_1\right)} \tag{6.1}$$

$$\Phi_1 := B_1\cdot A$$

$$B_1 A \tag{6.2}$$

$$\Phi_2 := B_2\cdot A$$

$$B_2 A \tag{6.3}$$

Ora consideriamo i diversi casi.

(a) da 0, 0 ms a 3, 0 ms;

$t_{1a} := 0 :$

$t_{2a} := 3\cdot 10^{-3} :$

$B_{1a} := 0 :$

$B_{2a} := -0.2\cdot 10^{-3} :$

$R := 4\cdot 10^{-3} :$

$A := 30\cdot 10^{-4} :$

$$i_a := -\frac{A}{R}\cdot\frac{\left(B_{2a}-B_{1a}\right)}{\left(t_{2a}-t_{1a}\right)}\ \mathrm{A}$$

$$0.05000000000\ \mathrm{A} \tag{6.4}$$

b) da 3, 0 ms a 5, 0 ms;

$t_{1b} := 3\cdot 10^{-3} :$

$t_{2b} := 5\cdot 10^{-3} :$

$B_{1b} := -0.2\cdot 10^{-3} :$

$B_{2b} := 0.2\cdot 10^{-3} :$

$R := 4\cdot 10^{-3} :$

$A := 30\cdot 10^{-4} :$

$$i_b := -\frac{A}{R}\cdot\frac{\left(B_{2b}-B_{1b}\right)}{\left(t_{2b}-t_{1b}\right)}\ \mathrm{A}$$

$$-0.1500000000\ \mathrm{A} \tag{6.5}$$

c) da 5, 0 ms a 10 ms;

$t_{1c} := 5\cdot 10^{-3} :$

$t_{2c} := 10\cdot 10^{-3} :$

$B_{1c} := 0.2\cdot 10^{-3} :$

$B_{2c} := 0 :$

$R := 4\cdot 10^{-3} :$

$A := 30 \cdot 10^{-4}$:

$i_c := -\frac{A}{R} \cdot \frac{(B_{2c} - B_{1c})}{(t_{2c} - t_{1c})}$ A

$$0.03000000000 \text{ A} \quad \textbf{(6.6)}$$

Quesito 7

In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento a esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2, 0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità v = 0, 80 c lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

Soluzione

La velocità media nel sistema di riferimento del laboratorio è data da:

$d := 0.25$:

$t_{lab} := 2 \cdot 10^{-9}$:

$v_m := \frac{d}{t_{lab}}$

$$1.250000000\ 10^{8} \quad \textbf{(7.1)}$$

Per calcolare la velocità rispetto a c, è necessario dividere il risultato ottenuto per la velocità della luce c:

$v_{m,lab} := \frac{v_m}{3 \cdot 10^8} \cdot c$

$$0.4166666667\ c \quad \textbf{(7.2)}$$

Ora componiamo relativisticamente la velocità della particella nel sistema di riferimento del laboratorio con la velocità della navicella, per ricavare la velocità media della particella nel sistema di riferimento solidale con la navicella.

$v_{nav} := 0.8\ c$

$$0.8\ c \quad \textbf{(7.3)}$$

$v_{nav,SI} := \frac{v_{nav} \cdot 3 \cdot 10^8}{c}$

$$2.400000000\ 10^{8} \quad \textbf{(7.4)}$$

$v_{m,nav} := \frac{(v_{m,lab} - v_{nav})}{1 - \frac{(v_{nav} \cdot v_{m,lab})}{c^2}}$

$$-0.5750000000\ c \quad \textbf{(7.5)}$$

Nel sistema solidale con il laboratorio consideriamo i due eventi di coordinate spazio-temporali (0 m, 0 ns) e (0, 25 m, 2 ns). Perciò, nel sistema di riferimento del laboratorio, abbiamo:

$\Delta x_1 := 0.25$:

$\Delta t_1 := 2 \cdot 10^{-9}$:

Per ricavare l'intervallo di tempo e la distanza che verrebbero misurati da un osservatore posto sulla navicella, si applicano le leggi di Lorentz, dove il coefficiente di dilatazione γ è dato da

$$gam := \frac{1}{\left(1 - \frac{v_{nav}^{2}}{c^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$1.666666667 \tag{7.6}$$

$$c := 3 \cdot 10^{8}$$

$$300000000 \tag{7.7}$$

$$\Delta x_{2} := gam \cdot \left(\Delta x_{1} - v_{nav,SI} \cdot \Delta t_{1}\right)$$

$$-0.3833333334 \tag{7.8}$$

$$\Delta t_{2} := gam \cdot \left(\Delta t_{1} - \frac{v_{nav,SI}}{c^{2}} \cdot \Delta x_{1}\right)$$

$$2.222222222\ 10^{-9} \tag{7.9}$$

Quesito 8

Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo |***B***|=1,00 mT. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria a elica cilindrica, con passo costante Δx = 38, 1 cm, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio r = 10, 5 cm e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con **B**.

Soluzione

La velocità **v** del protone è data dalla somma vettoriale di una componente centripeta v_c e di una componente tangenziale v_t , rispettivamente perpendicolare e parallela al campo magnetico **B**.
La componente centripeta si ricava dall'uguaglianza tra la forza centripeta e la forza di Lorentz:

$$F_{c} := m_{p} \frac{v_{c}^{2}}{r}$$

$$\frac{m_{p} v_{c}^{2}}{r} \tag{8.1}$$

$$F_{L} := e \cdot v_{c} \cdot B$$

$$e\, v_{c} B \tag{8.2}$$

$$solve\left(F_{c} = F_{L}, v_{c}\right)$$

$$0, \frac{B\, e\, r}{m_{p}} \tag{8.3}$$

$$v_{c} := \frac{B\, e\, r}{m_{p}}$$

$$\frac{B\, e\, r}{m_{p}} \tag{8.4}$$

Il periodo della componente centripeta del moto è dato da:

$T := \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_c}$

$$\frac{2\,\pi\,m_p}{B\,e} \tag{8.5}$$

Il passo dell'elica è dato dallo spostamento compiuto dal protone nella direzione del campo magnetico ed equivale a:

$\Delta x = T \cdot v_t$

$$\Delta x = \frac{2\,\pi\,m_p\,v_t}{B\,e} \tag{8.6}$$

Quindi, per calcolare la componente parallela della velocità:

$v_t := solve(\Delta x = T \cdot v_t, v_t)$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Delta x\,B\,e}{\pi\,m_p} \tag{8.7}$$

Possiamo pertanto calcolare il modulo di **v**:

$$v := \sqrt{v_c^2 + v_t^2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\,B^2\,e^2\,r^2}{m_p^2} + \frac{\Delta x^2\,B^2\,e^2}{\pi^2\,m_p^2}} \tag{8.8}$$

Sostituendo infine i valori, otteniamo:

$B := 10^{-3}$:

$\Delta x := 0.381$:

$r := 10.5 \cdot 10^{-2}$:

$m_p := 1.673 \cdot 10^{-27}$:

$e := 1.602 \cdot 10^{-19}$:

v

$$\frac{1}{2}\sqrt{4.043632988\ 10^8 + \frac{1.331015438\ 10^9}{\pi^2}} \tag{8.9}$$

$evalf(\%)$

$$11610.59170 \tag{8.10}$$

Quindi $v \approx 1.161 \cdot 10^4\ \frac{m}{s}$.

L'angolo α tra il campo magnetico **B** e il vettore velocità **v** è dato da:

$\alpha := \frac{\arctan\left(\frac{v_c}{v_t}\right) \cdot 180}{\pi}$

$$\frac{180\arctan(0.5511811026\,\pi)}{\pi} \tag{8.11}$$

$evalf(\%)$

$$59.99334800 \tag{8.12}$$

L'angolo è di circa 60°.