SCOMPOSIZIONE CON I PRODOTTI NOTEVOLI

QUADRATO DI BINOMIO

Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi:

a. $30a + 25 + 9a^2$

Riconosciamo i due quadrati,

$25 = \mathbf{5}^2$ e $9a^2 = (\mathbf{3a})^2$,

e verifichiamo il doppio prodotto,

$2 \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{3a} = 30a$.

$30a + 25 + 9a^2 = (\mathbf{5} + \mathbf{3a})^2 = (3a + 5)^2$

b. $36x^2 + y^2 - 12xy$

Riconosciamo i due quadrati,

$36x^2 = (6x)^2$ e $y^2 = (y)^2$.

Il doppio prodotto ha segno $-$, quindi può essere scritto in due modi:

$-12xy = 2 \cdot (-\mathbf{6x}) \cdot \mathbf{y} = 2 \cdot \mathbf{6x} \cdot (-\mathbf{y})$.

$\Rightarrow 2(6x)(y) = 12xy$

Possiamo quindi scomporre il polinomio come quadrato di binomio in due modi equivalenti.

$36x^2 + y^2 - 12xy =$

$\boxed{(\mathbf{6x} - \mathbf{y})^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{6x})^2}$

una delle due

c. $\frac{1}{4}a^4b^2 + 4a^2b + 16$

Riconosciamo i due quadrati,

$\frac{1}{4}a^4b^2 = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a^2b}\right)^2$ e $16 = \mathbf{4}^2$,

e verifichiamo il doppio prodotto,

$2 \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a^2b} \cdot \mathbf{4} = 4a^2b$.

$\frac{1}{4}a^4b^2 + 4a^2b + 16 = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a^2b} + \mathbf{4}\right)^2$

Per scomporre un polinomio riconducendolo al **quadrato di un binomio**, dobbiamo individuare A e B in modo che:

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2.$$

Procediamo così:

- cerchiamo i *due quadrati*, da cui deduciamo A e B;
- verifichiamo poi che il terzo termine sia il *doppio prodotto* di A e B.

ESERCITAZIONE:

Scomponi $y^2 - 10y + 25 = (y-5)^2 = (5-y)^2$

$y \qquad 5$

$2(y)(5) = 10y$

Posso anche scomporre con il trinomio particolare

$S = -10 \qquad P = 25$

-5 e -5

$y^2 - 10y + 25 = (y-5)(y-5) = (y-5)^2$

DİFFERENZA DI QUADRATI

Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi.

a. $36x^4 - 25$

Riconosciamo due quadrati, di cui abbiamo la differenza.

$36x^4 - 25 =$

$(6x^2)^2 - 5^2 =$

$(6x^2 + 5)(6x^2 - 5)$

b. $81z^4 - 1$

Dopo aver scomposto mediante la differenza di quadrati, utilizziamo di nuovo lo stesso metodo per scomporre uno dei fattori ottenuti.

$81z^4 - 1 =$

$(9z^2)^2 - 1^2 =$

$(9z^2 + 1)(9z^2 - 1) =$

$(9z^2 + 1)[(3z)^2 - 1^2] =$

$(9z^2 + 1)(3z + 1)(3z - 1)$

$\boxed{\text{LA SOMMA DI QUADRATI È IRRIDUCIBILE}}$

$9z^2 + 1$ È IRRIDUCIBILE

Per scomporre un polinomio nella somma di due termini per la loro differenza, dobbiamo individuare A e B in modo da ricondurlo alla **differenza di quadrati**:

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

ESERCITAZIONE

Scomponi $\frac{25}{9}x^4 - 49y^4 = \left(\frac{5}{3}x^2 - 7y^2\right)\left(\frac{5}{3}x^2 + 7y^2\right)$

$\frac{5}{3}x^2 \qquad 7y^2$

QUADRATO DI TRINOMIO

Scomponiamo il seguente polinomio

a. $x^4 + 4ax^2 + 6bx^2 + 4a^2 + 12ab + 9b^2$

Riconosciamo i tre quadrati,

$x^4 = (\boldsymbol{x^2})^2$, $4a^2 = (\boldsymbol{2a})^2$ e $9b^2 = (\boldsymbol{3b})^2$,

e verifichiamo i tre doppi prodotti,

$2 \cdot \boldsymbol{2a} \cdot \boldsymbol{x^2} = 4ax^2$, $2 \cdot \boldsymbol{3b} \cdot \boldsymbol{x^2} = 6bx^2$ e

$2 \cdot \boldsymbol{2a} \cdot \boldsymbol{3b} = 12ab$.

$x^4 + 4ax^2 + 6bx^2 + 4a^2 + 12ab + 9b^2 =$

$(\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{2a} + \boldsymbol{3b})^2$

b. $4 - 4a^2 + a^4 + 20x - 10a^2x + 25x^2$

$-4a^2$ non e' un quadrato perchè ha segno negativo

Riconosciamo i tre quadrati,

$4 = 2^2$, $a^4 = (a^2)^2$ e $25x^2 = (5x)^2$.

Due dei doppi prodotti hanno segno $-$, cioè $-4a^2$ e $-10a^2x$.

Sono i monomi che contengono il termine a^2.

Verifichiamo quindi i doppi prodotti, mettendo il segno $-$ al termine a^2: $2 \cdot (\boldsymbol{-a^2}) \cdot \boldsymbol{2} = -4a^2$, $2 \cdot \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{5x} = 20x$,

$2 \cdot (\boldsymbol{-a^2}) \cdot \boldsymbol{5x} = -10a^2x$.

$2 \qquad 5x \qquad a^2$

$+ \qquad + \qquad -$

$- \qquad - \qquad +$

$4 - 4a^2 + a^4 + 20x - 10a^2x + 25x^2 =$

$(\boldsymbol{2} + \boldsymbol{5x} \boldsymbol{-a^2})^2$

Se cambiamo i segni all'interno delle parentesi, otteniamo l'espressione equivalente

$(a^2 - 5x - 2)^2$.

ESERCITAZIONE:

Scomponi:

c. $9z^2+\frac{1}{9}x^2y^2+\frac{2}{3}xy+1-6z-2xyz$

Riconosciamo i tre quadrati,

$9z^2=(3z)^2$, $\frac{1}{9}x^2y^2=\left(\frac{1}{3}xy\right)^2$ e $1=1^2$,

e verifichiamo i tre doppi prodotti,

$2\cdot\frac{1}{3}xy\cdot 1=\frac{2}{3}xy$, $2\cdot(-3z)\cdot 1=-6z$ e

$2\cdot(-3z)\cdot\frac{1}{3}xy=-2xyz$.

$9z^2+\frac{1}{9}x^2y^2+\frac{2}{3}xy+1-6z-2xyz=$

$\left(\frac{1}{3}xy+1-3z\right)^2=\left(3z-\frac{1}{3}xy-1\right)^2$

$\frac{1}{3}xy \quad 1 \quad 3z$

$+ \quad + \quad -$

$- \quad - \quad +$

Per scomporre un polinomio riconducendolo al **quadrato di un trinomio**, dobbiamo individuare A, B e C in modo che:

$$A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC=(A+B+C)^2.$$

Procediamo così:

- cerchiamo i **tre quadrati**, da cui deduciamo A, B e C;
- verifichiamo poi che gli altri tre termini siano i **tre doppi prodotti**.