Il sottoscritto dichiara ai sensi dell'art. 47 del D.P.R. 28/12/2000, n.445 che la seguente copia è conforme all'originale pubblicato sul periodico della Mathesis, serie VII- volume 7, Numero 2-3, luglio-dicembre 2000

DALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE FUNZIONI e^x, $\log x$, a^x, $\log_a x$, x^α.

R.Raucci[1]

L.Taddeo[2]

Sunto

In questo breve lavoro, a partire dalle equazioni differenziali e dalla funzione potenza ad esponente intero, abbiamo definito la funzione esponenziale e^x e, da questa, le funzioni $\log x$, a^x, $\log_a x$ e x^α. Abbiamo dimostrato le note proprietà di queste funzioni ed, infine, abbiamo mostrato come il calcolo di e^x e, quindi delle altre sopra citate, coincida con quello usuale.

1. Introduzione

L'interesse per le questioni affrontate in questo lavoro è ben noto in campo scientifico. Infatti diversi autori si sono occupati di come definire le funzioni elementari non in modo classico. A tale proposito citiamo, per

---

[1] Dipartimento di Scienze economiche, Università di Salerno, v. Ponte Don Melillo, 84084, Fisciano(Salerno), *rraucci@diima.unisa.it*

[2] Liceo Scientifico "Garofano", v. Napoli n.1, 81043, Capua (Caserta), ***luitad@tin.it***

esempio, Marcellini- Sbordone [3], che partono da un integrale, Cecconi-Stampacchia [1], che utilizzano, diversamente da noi, le serie di potenze, Giusti [2] che tratta le funzioni goniometriche partendo da un problema di Cauchy del secondo ordine. Un percorso alternativo per chi non gradisce l'uso del teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy del primo ordine è presentato nell'ultima parte di questo lavoro. In questa parte, a partire dall'equazione differenziale $y'=\frac{1}{x}$ con $x>0$, si dimostra, attraverso alcune proposizioni, l'esistenza e l'unicità del problema di Cauchy $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1 \end{cases}$. A questo punto si può definire la funzione esponenziale e da questa tutte le altre considerate nel presente lavoro con le stesse dimostrazioni presentate nelle sezione 2 e 3. Questo procedimento ha in comune con quello proposto da Marcellini- Sbordone il fatto che nel percorso, in effetti, la funzione logaritmo precede quella esponenziale, ma si differenzia sia per le tecniche dimostrative utilizzate (abbiamo preferito indurre lo studente a confrontarsi in modo diretto con le equazioni differenziali) sia perché abbiamo evitato di dover dimostrare la crescenza e la limitatezza della successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, che, a nostro giudizio, "costa più di quanto offre", come accennato prima.

2. Le funzioni e^x e $\log x$

Consideriamo l'equazione differenziale $y'=y$. Sia f una soluzione (f esiste ed è definita nell'insieme dei numeri reali $\Re$, per la teoria delle equazioni differenziali).

Vale la seguente proposizione:

Proposizione 1

a) Se f è positiva in un punto a, allora f è positiva in $[a,+\infty[$.

b) Se f è negativa in un punto a, allora f è negativa in $[a,+\infty[$.

c) Se f è nulla in un punto a, allora f è identicamente nulla in $\Re$.

Dimostrazione

a) Sia $A = \{x > a : f(x) \le 0\}$. Supponiamo per assurdo che $A \ne \emptyset$ e sia c=inf(A). Notiamo che c>a, perché $f(c) \le 0$; infatti, se fosse f(c)>0, dalla continuità di f e dal teorema della permanenza del segno, esisterebbe un intorno di c disgiunto da A, contro il fatto che c=inf(A). Per definizione di estremo inferiore, la funzione è positiva in [a,c[. Ne segue che f è strettamente crescente in [a,c]

(perché $f = f'$) e ciò è assurdo poiché f(a)>0 e f(c)≤0. Dunque A=∅ ed allora f è positiva in $[a,+\infty[$.

b) Sia $A = \{x > a : f(x) \ge 0\}$. Supponiamo per assurdo che $A \ne \emptyset$ e sia c=inf(A). Da ciò avremo, sempre per la continuità di f e per il teorema della permanenza del segno, che f(c)≥0 e quindi c>a. Allora in [a,c[la funzione è negativa e, poiché $f = f'$, essa è strettamente decrescente in [a,c]; ma ciò è assurdo poiché f(a)<0 e f(c)≥0.

c) Consideriamo il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(a) = 0 \end{cases}$.

Dalla teoria delle equazioni differenziali sappiamo che esiste ed è unica la soluzione di questo problema. Poiché la funzione identicamente nulla lo risolve, essa è l'unica soluzione. Quindi f(x)=0 $\forall x \in \Re$.

Proposizione 2

a) Se esiste $a \in \Re$ tale che f(a)>0, allora f(x)>0 $\forall x \in \Re$.

b) Se esiste $a \in \Re$ tale che f(a)<0, allora f(x)<0 $\forall x \in \Re$.

Dimostrazione

a) Per quanto dimostrato in prop.(1) $\forall x \in [a,+\infty[$ risulta f(x)>0. Se esistesse $x_0 \in]-\infty,a[$ tale che $f(x_0)<0$, allora, sempre per quanto dimostrato in (1), si avrebbe f(x)<0 $\forall x \in [x_0,+\infty[$ e ciò contro il fatto che f(a)>0. Così è provato che f(x)>0 $\forall x \in \Re$.

b) Ragionando in modo analogo si ottiene f(x)<0 $\forall x \in \Re$.

Consideriamo adesso il problema di Cauchy (1) $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Sappiamo, per quanto detto prima, che esiste ed è unica la soluzione di questo problema e che tale soluzione è definita in $\Re$. Per quanto dimostrato nella prop.(2), tale soluzione è una funzione positiva in $\Re$, strettamente crescente e convessa.

Vale la seguente proposizione:

Proposizione 3

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Dimostrazione

a) Poiché f è strettamente crescente in $\Re$ allora esiste $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = h$ ed inoltre, poiché f è positiva, $0 \le h < +\infty$. Applicando il teorema di Lagrange si ha, $\forall x \in \Re$, $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$ con $c_x \in\ ]x\ ,\ x+1[$. Dall'esistenza del $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ si ha che $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = h$. Da ciò e dalla finitezza di h si ha che $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(c_x) = 0$. Poiché $f'(c_x) = f(c_x)$ e poiché da $x \to -\infty$ segue che $c_x \to -\infty$, si deduce che $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b) Poiché f è strettamente crescente in $\Re$ ne segue che esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ e poiché f(0)=1, allora $1 < k \le +\infty$.

Se fosse k $\neq +\infty$, sempre per il teorema di Lagrange avremmo che
$f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$
con $c_x \in\ ]x, x+1[$ e ciò implicherebbe che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, contro il fatto che k >1.

Osservazione 1

Potremmo dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ procedendo in modo diverso: poiché f è convessa e strettamente positiva, fissato $x_0 \in \Re$ e $\forall x \in \Re$, si ha $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e passando al limite per $x \to +\infty$ si ha:
$\lim_{x \to +\infty} f(x) \geq \lim_{x \to +\infty} [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = +\infty$.

Osservazione 2

Notiamo che, dalla proposizione appena dimostrata, si deduce che nessuna funzione razionale risolve il problema di Cauchy (1), poiché per siffatte funzioni i limiti a più e meno infinito coincidono in valore assoluto.

Proposizione 4

a) $\forall x, y \in \Re$ si ha $f(x+y) = f(x)f(y)$.

b) $\forall x, y \in \Re$ si ha $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$.

Dimostrazione

a) Fissato $y \in \Re$ e $\forall x \in \Re$, consideriamo $F(x) = f(x+y) - f(x)f(y)$. Notiamo che F(0)=f(y)-f(y)=0. Inoltre $F'(x) = f'(x+y) - f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x)f(y) = F(x)$. Dunque, $\forall x \in \Re$, risulta $F = F'$ e F(0)=0. Allora, per quanto dimostrato nella prop.(1), F è identicamente nulla in $\Re$ e ciò vale per ogni $y \in \Re$. Quindi $\forall x, y \in \Re$ si ha $f(x+y) = f(x)f(y)$.

b) $1 = f(0) = f(y-y) = f[y+(-y)] = f(y)f(-y)$. Dunque $f(y)f(-y) = 1$ e ciò implica che, poiché f(y)≠0, $f(-y) = \frac{1}{f(y)}$. $\forall x,y \in \Re$ si ha $f(x-y) = f(x)f(-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$.

Definizione 1
Definiamo l'unica soluzione del problema (1) funzione esponenziale in base "e" e denotiamola con $f(x) = e^x$.
Detta funzione, poiché è la soluzione del problema (1), è strettamente crescente in $\Re$, dunque è invertibile.
Definizione 2
Definiamo inversa della funzione e^x la funzione logaritmo di x, in simboli poniamo: $f^{-1}(x) = \log x$.
Tenuto conto del legame tra una funzione e la sua inversa, si ha:
$f : \Re \to]0,+\infty[$ e $f^{-1} :]0,+\infty[\to \Re$.
Dalla formula di derivazione delle funzioni inverse si ha:
$D(\log x) = \frac{1}{x}$.
Inoltre:
Osservazione 3
Se 0<a<1, allora log a <0. (1)
Infatti log a<0 $\Leftrightarrow$ $e^{\log a} < e^0$ $\Leftrightarrow$ 0<a<1.
Se a>1, allora log a>0. (1)'
Infatti log a>0 $\Leftrightarrow$ $e^{\log a} > e^0$ $\Leftrightarrow$ a>1.
$\forall x,y \in]0,+\infty[$ si ha $\log xy = \log x + \log y$. (2)
Infatti

$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \Leftrightarrow f[f^{-1}(xy)] = f[f^{-1}(x) + f^{-1}(y)]$. Per la prop. (4) $f[f^{-1}(x) + f^{-1}(y)] = f[f^{-1}(x)] \cdot f[f^{-1}(y)] = xy$ e $f[f^{-1}(xy)] = xy$.

$\forall x \in]0,+\infty[$ e $\forall n \in N$ si ha: $\log x^n = n \log x$. (3)

Infatti, dalla (2) e per x=y, risulta $\log x^2 = 2 \log x$. Procedendo per induzione si ottiene $\log x^n = n \log x$.

$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$ e $\lim_{x \to 0} \log x = -\infty$. (4)

Infatti, poiché il codominio della funzione log x è $\Re$ e poiché essa è strettamente crescente (essendo inversa di una funzione strettamente crescente), segue che $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$ e $\lim_{x \to 0} \log x = -\infty$.

La seguente proposizione risponde alla domanda: chi è "e", cioè chi è f(1)?

Proposizione 5

$$f(1) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Dimostrazione

Ricordiamo che se f è una funzione continua in X, allora si ha:

a) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = h$, allora, $\forall x_n \to x_0$, con $x_n \neq x_0$ e $x_n \in X$, $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = h$.

b) Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = h \in X$, allora $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(h)$.

Passando alla dimostrazione della proposizione si ha

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^{n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$. Applicando la regola di De

L'Hospital al $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ segue che $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$. Dunque $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e^1=e$.

3. Le funzioni a^x, $\log_a x$ e x^α

Seguono adesso le definizioni, a partire dalla funzione e^x, delle funzioni a^x, $\log_a x$ e di x^α e le rispettive proprietà.

Definizione 3

$\forall x\in\,]0,+\infty[$ e $\forall\alpha\in\Re$, con $\alpha\neq0$ e $\alpha\neq1$, definiamo $x^\alpha=e^{\alpha\log x}$ (*i casi $\alpha=0$ e $\alpha=1$ ci darebbero, rispettivamente, la funzione costante uguale ad 1 e la funzione identica*).

Osservazione 4

Se $\alpha=n\in N$, la funzione x^α ora definita coincide con la restrizione a $]0,+\infty[$ della già nota funzione potenza x^n. Difatti $e^{n\log x}=e^{\log x^n}=x^n$.

Proposizione 6

a) $x^{\alpha+\beta}=x^\alpha x^\beta$.

b) $x^{\alpha-\beta}=\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$.

c) $D(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}$.

Dimostrazione

a) Dalla prop.(4): $x^{\alpha+\beta}=e^{(\alpha+\beta)\log x}=e^{\alpha\log x+\beta\log x}=e^{\alpha\log x}e^{\beta\log x}=x^\alpha x^\beta$.

b) Dalla prop.(4): $x^{\alpha-\beta}=e^{(\alpha-\beta)\log x}=e^{\alpha\log x-\beta\log x}=\dfrac{e^{\alpha\log x}}{e^{\beta\log x}}=\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$.

c) $D(x^{\alpha}) = D(e^{\alpha \log x}) =$ (*per la formula di derivazione delle funzioni composte*) $= \alpha \dfrac{1}{x} e^{\alpha \log x} = \alpha \dfrac{1}{x} x^{\alpha} =$ (*per la (b)*) $= \alpha x^{\alpha - 1}$.

Proposizione 7

$e^{\alpha x} = \left(e^{x}\right)^{\alpha}$.

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che $f(\alpha x) = [f(x)]^{\alpha}$.

Consideriamo il seguente problema di Cauchy: $(2)\begin{cases} y' = cy \\ y(0) = 0 \end{cases}$ con $c \in \Re$.

L'unica soluzione di questo problema è, dalla teoria delle equazioni differenziali, la funzione identicamente nulla. Poniamo $g(x) = [f(x)]^{\alpha} - f(\alpha x)$ e notiamo che $g(0) = [f(0)]^{\alpha} - f(0) = 1^{\alpha} - 1 = 0$. Dunque g(0)=0. Inoltre, $\forall x \in]0,+\infty[$ e $\forall \alpha \in \Re$ e per la prop.(6), $g'(x) = \alpha [f(x)]^{\alpha - 1} f'(x) - \alpha f'(\alpha x) =$ *(poiché* $f' = f$)

$= \alpha [f(x)]^{\alpha - 1} f(x) - \alpha f(\alpha x) = \alpha [f(x)]^{\alpha} - \alpha f(\alpha x) = \alpha [(f(x))^{\alpha} - f(\alpha x)] =$ $\alpha g(x)$. Dunque la funzione g risolve il problema (2) e da ciò segue che essa è la funzione identicamente nulla. Quindi $[f(x)]^{\alpha} = f(\alpha x)$, cioè $e^{\alpha x} = \left(e^{x}\right)^{\alpha}$.

Definizione 4

Definiamo, $\forall a \in]0,+\infty[- \{1\}$, $a^{x} = e^{x \log a}$

Proposizione 8

a) a^{x} è strettamente positiva.

b) a^{x} è strettamente crescente se a>1, strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

c) a^{x} è convessa.

d) $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$.

e) $\forall x, y \in]0,+\infty[$ e $\forall \alpha \in \Re$ si ha $\begin{cases} a^{x+y} = a^x a^y \\ a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y} \\ \left(a^x\right)^\alpha = a^{\alpha x} \end{cases}$.

Dimostrazione

a) Segue dalla definizione.

b) $D\left(a^x\right) = D\left(e^{x\log a}\right) =$ (*per la formula di derivazione delle funzioni composte*) $= (\log a)e^{x\log a} = (\log a)a^x$. Dunque se $\log a > 0$ cioè se a>1, a^x è strettamente crescente; se $\log a < 0$ cioè se $0 < a < 1$, a^x è strettamente decrescente.

c) $D^{(2)}(a^x) = D[(\log a)a^x] = (\log a)^2 a^x$. Dunque la funzione è convessa.

d) $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log a}$. Da questa uguaglianza e dalla prop.(3) segue la prima parte della tesi. Applicando lo stesso ragionamento a $\lim_{x\to-\infty} a^x$ si ottiene la seconda parte della tesi.

e) Per la prop.(4) si ottiene $a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x\log a}e^{y\log a} = a^x a^y$ e $a^{x-y} = e^{(x-y)\log a} = \dfrac{e^{x\log a}}{e^{y\log a}} = \dfrac{a^x}{a^y}$. Per la prop.(7) e dalla definizione di a^x si ha: $(a^x)^\alpha = (e^{x\log a})^\alpha = e^{\alpha x\log a} = a^{\alpha x}$.

Definizione 5

Dalla stretta monotonia della funzione a^x segue che essa è invertibile. Definiamo logaritmo in base “a” la funzione inversa di $\lambda(x) = a^x$; in simboli poniamo: $\lambda^{-1}(x) = \log_a x$.

Proposizione 9

a) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \forall x,y \in]0,+\infty[$.

b) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \forall x,y \in]0,+\infty[$.

c) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad \forall x \in]0,+\infty[$ e $\forall \alpha \in \Re$.

Dimostrazione

a) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y \iff a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Ma $a^{\log_a xy} = xy$ e per la prop.(8), $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$.

b) Ragionando in modo analogo si ottiene la (b).

c) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \iff a^{\log_a x^\alpha} = a^{\alpha \log_a x}$. Ma $a^{\log_a x^\alpha} = x^\alpha$ e, per la prop.(8), $a^{\alpha \log_a x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha$.

Proposizione 10

a) x^α è strettamente positiva $\forall x \in]0,+\infty[$ e $\forall \alpha \in \Re$.

b) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \ \forall x,y \in]0,+\infty[$ e $\forall \alpha \in \Re$.

c) x^α è strettamente crescente se $\alpha > 0$ e strettamente decrescente se $\alpha < 0$.

d) x^α è convessa se $\alpha < 0 \cup \alpha > 1$, concava se $0 < \alpha < 1$.

e) $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$ e $\lim_{x \to 0} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$.

Dimostrazione

a) Segue dalla definizione.

b) $(xy)^\alpha = e^{\alpha \log xy} = e^{\alpha \log x + \alpha \log y} = e^{\alpha \log x} e^{\alpha \log y} = x^\alpha y^\alpha$.

c) Da $D(x)^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$ segue la tesi.

d) $D^{(2)}(x^\alpha) = D(\alpha x^{\alpha-1}) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$ e quindi la tesi.

e) $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = \lim_{x\to+\infty} e^{\alpha \log x}$ e da ciò segue la tesi. Allo stesso modo si ragiona per $\lim_{x\to 0} x^{\alpha}$.

Proposizione 11

$\forall a, b, c \in]0,+\infty[$ con $b \neq 1$ e $c \neq 1$, si ha $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.

Dimostrazione

Posto $\log_b a = \alpha$ e $\log_c b = \beta$ si ha $b^{\alpha} = a$ e $c^{\beta} = b$. Inoltre $(c^{\beta})^{\alpha} = (b)^{\alpha} = a$ ma $(c^{\beta})^{\alpha} = c^{\beta\alpha} = a \Leftrightarrow \log_c c^{\beta\alpha} = \log_c a$ ma $\log_c c = 1$, da cui $\log_c c^{\beta\alpha} = \beta\alpha$, quindi $\beta\alpha = \log_c a$ cioè $(\log_c b)(\log_b a) = \log_c a$ da cui si ottiene la tesi.

Proposizione 12

La funzione $\log_a x$ è convessa se $0 < a < 1$, concava se $a > 1$.

Dimostrazione

Per la prop.(11) $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ e quindi $D(\log_a x) = D\left(\dfrac{\log x}{\log a}\right) = \dfrac{1}{x \log a}$.

$D^{(2)}(\log_a x) = D\left(\dfrac{1}{x \log a}\right) = \dfrac{-1}{x^2 \log a}$ da cui si ottiene la tesi.

4. Conclusioni

Riassumendo siamo partiti dal problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e da questo abbiamo definito la funzione e^x. Da questa funzione poi abbiamo definito le funzioni $\log x$, a^x, $\log_a x$ e x^{α}. Quindi per calcolare il valore di queste funzioni basta saper calcolare i valori di e^x. Dal

procedimento che segue si stabilisce il metodo per il calcolo di e^x e si "raccorda" tale metodo con quello usuale.
Poiché si "conoscono" le potenze ad esponente intero, risulta facile calcolare e^n e e^{-n}, tenuto conto anche del fatto che $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1$ e quindi la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ci fornisce un valore approssimato di "e". Vediamo come introdurre il concetto di radice di un numero reale positivo e come questo equivale al procedimento usuale.

Sia $x > 0$, $x^{\frac{m}{n}} = t \Leftrightarrow x^m = t^n$, infatti, per quanto dimostrato prima, $x^{\frac{m}{n}} = t \Leftrightarrow \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n = (t)^n$ cioè $x^{\frac{m}{n}n} = t^n \Leftrightarrow x^m = t^n$.

Vediamo adesso come calcolare, $\forall x \in \Re$, e^x. Sia $x \in \Re$ e sia $x_n \to x$ con $x_n \in Q$ allora, per la continuità di e^x, si ha $e^x = \lim_{n\to+\infty} e^{x_n}$. Questo metodo ci fornisce un valore approssimato di e^x e, se la successione x_n è monotona crescente o decrescente, un valore approssimato rispettivamente per difetto o per eccesso. Questo metodo coincide con quello usuale, infatti in quest'ultimo si considerano gli insiemi $A = \{r \in Q : r < x\}$ e $B = \{s \in Q : s > x\}$ e quindi gli insiemi $C = \{e^r : r \in A\}$ e $D = \{e^s : s \in B\}$ e si definisce e^x come l'unico elemento di separazione tra gli insiemi contigui C e D.

Percorso alternativo

Consideriamo l'equazione differenziale $y' = y$. Si ha:

Proposizione A

L'equazione differenziale $y' = y$ ha soluzioni.

Dimostrazione

Consideriamo l'equazione differenziale $y'=\frac{1}{x}$ con $x>0$. Dalla teoria degli integrali , poiché la funzione $t(x)=\frac{1}{x}$ è continua in $]0;+\infty[$, essa ha soluzioni. Una qualsiasi soluzione si può scrivere come $y(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt+c$. Sia $g(x)$ la soluzione ottenuta per c=0; osserviamo che il suo codominio è $\Re$. Infatti il $\lim_{x\to 0} g(x)$ esiste ed è negativo, perché $g'(x)$ è positiva, dunque $g(x)$ è strettamente crescente ed inoltre $g(1)=0$. Supponiamo, per assurdo, che esso sia $h\neq -\infty$. $\forall x>0$ consideriamo g in $]x;2x[$. Applicando il teorema di Lagrange si ha: $g(2x)-g(x)=x\, g'(x+x\theta_x)$. Passando al limite per x che tende a $+\infty$, si ottiene, per $h\neq -\infty$, che il primo membro tende a 0, mentre il secondo membro che è $\frac{x}{x(1+\theta_x)}$ non tende a 0 poiché $\theta_x\in\,]0;1[$. Ragionando in modo analogo si dimostra che $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. La funzione $g(x)$ è invertibile, perché $g'(x)$ è positiva . Sia $f(x)=g^{-1}(x)$ l'inversa, per la formula di derivazione delle funzioni inverse si ha:

$$f'(x)=\frac{1}{D(g(z))_{z=f(x)}}=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}=f(x).$$

Dunque $f(x)$ risolve l'equazione differenziale $y'=y$.

Proposizione B

L'equazione differenziale $y'=cy$ con $c>0$ ha soluzioni.

Dimostrazione

Basta considerare l'equazione $y'=\frac{1}{cx}$ con $x>0$ e ragionare come nella proposizione precedente.

Proposizione C

Sia f una soluzione dell'equazione $y' = cy$ con $c > 0$, allora:

a) Se f è positiva in un punto a, allora f è positiva in [a,+∞[.

b) Se f è negativa in un punto a, allora f è negativa in [a,+∞[.

Dimostrazione

Si ragiona in modo analogo a quanto fatto nella prop.1.

Proposizione D

Esiste ed è unica la soluzione del problema $\begin{cases} y' = cy \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$ con $c > 0$.

Dimostrazione

La funzione identicamente nulla lo risolve, dimostriamo che tale soluzione è unica. Per la Prop.(C) una soluzione di questo problema non può essere diversa da zero in $x_1 < x_0$. Supponiamo, per assurdo, che esista una soluzione $y(x) = c\int_{x_0}^{x} y(t)dt$ del problema che in $[x_0;+\infty[$ non sia identicamente nulla. Si ha:

$A = \{u \in [x_0;+\infty[$ tale che $y \equiv 0$ in $[x_0;u]\} \neq \varnothing$ poiché $x_0 \in A$. Sia $x_1 = \sup A$, che dall'ipotesi assurda, è minore di +∞. Notiamo che, $\forall x \in \left[x_0; x_1 + \frac{1}{2c}\right]$, si ha:

$$|y(x)| \le c\int_{x_0}^{x} |y(t)|dt = c\int_{x_1}^{x} |y(t)|dt \le c\int_{x_1}^{x_1+\frac{1}{2c}} |y(t)|dt .$$

In $\left[x_1; x_1 + \frac{1}{2c}\right]$ la funzione $y(x)$ non è identicamente nulla e quindi la funzione $|y(x)|$ possiede, in questo intervallo, un massimo *M* positivo.

$\forall x \in \left[x_0; x_1 + \frac{1}{2c}\right]$ risulta: $|y(x)| \le c\int_{x_1}^{x_1+\frac{1}{2c}} |y(t)|dt \le \frac{1}{2}M$. Allora, passando al sup. al variare di $x \in \left[x_0 ; x_1 + \frac{1}{2c} \right]$, si ha $M \le \frac{1}{2} M$ e ciò è assurdo poiché *M* è positivo. Quindi f(x)=0 $\forall x \in \Re$.

Proposizione E

Il problema (E) $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ha un'unica soluzione.

Dimostrazione

Sappiamo, per quanto detto prima, che esiste una soluzione di questo problema, infatti basta considerare la funzione $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ (vedi la prop.(A)). Tale funzione in 1 vale 0, dunque la sua inversa $f(x)$ in 0 vale 1, cioè risolve il problema (E). Facciamo vedere che tale soluzione è unica. Infatti siano *f* e *h* due soluzioni, allora $(f - h)' = f' - h' = f - h$.

Quindi la funzione $f - h$ risolve il problema $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ e, per quanto dimostrato nella prop.(D), $f \equiv h$.

A questo punto possiamo definire la funzione $f(x) = e^x$ come l'unica soluzione del problema (E) e dimostrare tutte le proprietà, anche grazie alle proposizioni di questo paragrafo, già dimostrate nelle sezioni 2 e 3, senza utilizzare il teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy del primo ordine.

Bibliografia

[1] Cecconi J.P., Stampacchia G.(1983), Analisi Matematica, Vol. 1, Liguori, Napoli
[2] Giusti E.(1989), Analisi Matematica 2, Bollati Boringhieri, Torino
[3] Marcellini P., Sbordone C.(1992), Calcolo, Liguori, Napoli