Autori: M. Nocera, R. Raucci, L. Taddeo

Su alcuni limiti fondamentali: tecniche non classiche.

Abstract

Si calcola il limite $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$ *evidenziando come detto calcolo si possa ricondurre a quello di limiti notevoli senza utilizzare il primo teorema di de l'Hôpital o le classi delle funzioni infinitesime dello stesso ordine. Si prende spunto dal calcolo del limite per riflettere sull'utilizzo, a volte fatto con troppa disinvoltura, della sostituzione degli infiniti e degli infinitesimi. Inoltre si presenta un risultato teorico dal quale discende il suddetto limite e una prova non classica dell'altro limite notevole* $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

1. Calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

Sarà utile nel seguito tener conto della definizione di minimo e massimo limite.

Sia f una funzione definita in A sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A. Definiamo *minimo* (*massimo*) *limite* di f per x che tende x_0

$$\min\lim_{x\to x_0} f(x)=\min\left\{\min\lim_{n\to+\infty} f(x_n): x_n\in A-\{x_0\},\ \lim_{n\to+\infty} x_n=x_0\right\}$$

$$\left(\max\lim_{x\to x_0} f(x)=\max\left\{\max\lim_{n\to+\infty} f(x_n): x_n\in A-\{x_0\},\ \lim_{n\to+\infty} x_n=x_0\right\}\right)$$

È facile verificare che per ogni $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}$ si ha:

(1) $0\le\frac{x-\sin x}{x^3}\le\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(2) $\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{\tan x-\sin x}{x^3}-\frac{\tan^2 x}{x^2}+\frac{2x-\sin 2x}{2x^3\cos^2 x}$

Per quanto riguarda la **(1)** basta tener presente che le funzioni $\frac{x-\sin x}{x^3}$ e $\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ sono funzioni pari e per ogni $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ $\sin x<x<\tan x$.

Per dimostrare la **(2)** si osservi che sussiste la seguente uguaglianza: $\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{x-\sin x+\tan x-\tan x}{x^3}=\frac{\tan x-\sin x}{x^3}-\frac{\tan x-x}{x^3}$ e tenuto conto che:

$$\frac{\tan x-x}{x^3}=\frac{\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}-x}{x^3}=\frac{\frac{\sin 2x-x-x\cos 2x}{1+\cos 2x}}{x^3}=$$

$$=\frac{\sin 2x-x-x\cos 2x-2x+2x}{x^3\left(1+\cos 2x\right)}=\frac{\sin 2x-2x+x-x\cos 2x}{x^3\left(1+\cos 2x\right)}=$$

$$=\frac{x\left(1-\cos 2x\right)}{x^3\left(1+\cos 2x\right)}-\frac{2x-\sin 2x}{x^3\left(1+\cos 2x\right)}=\frac{\tan^2 x}{x^2}-\frac{2x-\sin 2x}{2x^3\cos^2 x}$$

si ottiene la **(2)**.

Siccome $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$, da **(1)** si deduce che, il minimo limite $\min\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=l'$ e il massimo limite $\max\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=l''$ della funzione $f\left(x\right)=\frac{x-\sin x}{x^3}$, per x che tende a 0, appartengono all'insieme dei numeri reali.

Da $f\left(2x\right)=\frac{2x-\sin 2x}{\left(2x\right)^3}$, si ha, per x che tende a 0, $\min\lim_{x\to x_0} f\left(2x\right)=l'$ e $\max\lim_{x\to x_0} f\left(2x\right)=l''$. Siccome le funzioni $\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ e $\frac{\tan^2 x}{x^2}$ sono convergenti, poiché per la **(2)** risulta:

$$f(x)=\frac{\tan x-\sin x}{x^3}-\frac{\tan^2 x}{x^2}+\frac{4}{\cos^2 x}f(2x)$$

si deduce:

$$l'=-\frac{1}{2}+4l' \text{ e } l''=-\frac{1}{2}+4l''$$

da cui $l'=l''=\dfrac{1}{6}$ e, dunque, l'asserto.

2. ***Generalizzazione***

Sia f una funzione definita in un intorno I di x_0 (eventualmente privato di x_0). Se

1) esistono tre funzioni F, g e h tali che:

$$f(x)=g(x)+h(x)\,f(F(x)) \text{ per ogni } x\in I-\{x_0\}$$

con g e h convergenti in x_0 e $\lim_{x\to x_0} h(x)\neq \pm 1$;

2) $\lim_{x\to x_0} F(x)=x_0$;

3) f è limitata in $I-\{x_0\}$;

4) per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset I$, con $x_n\neq x_0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n=x_0$, esiste una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0 tale che $F(y_n)=x_n$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, e $y_n\neq x_0$ frequentemente;

5) per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0, con $x_n\neq x_0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, risulta $F(x_n)\neq x_0$ frequentemente.

Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim_{x\to x_0} g(x)}{1-\lim_{x\to x_0} h(x)}.$$

Prima di dimostrare il teorema osserviamo che:

i) se F è continua in x_0 la **2)** equivale a dire che x_0 è un punto fisso di F ;

ii) se F è invertibile la **4)** equivale a dire che $\lim\limits_{x \to x_0} F^{-1}(x) = x_0$;

iii) se il limite $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = -1$ deduciamo che:

$$\min \lim_{x \to x_0} f(x) + \max \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) .$$

Dimostrazione.

Per l'ipotesi **2)** , **4) e 5)** si deduce che

$$\min \lim_{x \to x_0} f(x) = \min \lim_{x \to x_0} f\left(F(x)\right)$$

e

$$\max \lim_{x \to x_0} f(x) = \max \lim_{x \to x_0} f\left(F(x)\right)$$

e per la **3)** il minimo e massimo limite di f sono finiti.

Quindi, se $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) \geq 0$ da **1)** segue:

a) $\min \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) + \lim\limits_{x \to x_0} h(x) \cdot \min \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

da cui, poiché $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) \neq 1$, $\min \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}{1 - \lim\limits_{x \to x_0} h(x)}$ e l'asserto è conseguenza del fatto che vale anche $\max \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}{1 - \lim\limits_{x \to x_0} h(x)}$.

Invece, se $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) < 0$ da **1)** si ha invece:

$$\min \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) + \lim_{x \to x_0} h(x) \cdot \max \lim_{x \to x_0} f(x)$$

e

b) $\max \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) + \lim\limits_{x \to x_0} h(x) \cdot \min \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Sottraendo membro a membro deduciamo che $\min \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \max \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ da cui, poiché $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) \neq -1$, facilmente l'asserto.

È facile ricavare, inoltre, l'osservazione **iii)** come conseguenza della **b)**.

Ora il nostro limite si ottiene come corollario della proposizione appena dimostrata.

3. <u>Conseguenze</u>

Come conseguenza immediata si ha:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} - \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$, da cui $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Utilizzando poi il teorema sui limiti delle funzioni composte, con la sostituzione $y = \arcsin x$ si ha: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{y - \sin y}{\sin^3 y} = \frac{1}{6}$

Sempre per il teorema sui limiti delle funzioni composte, utilizzando la sostituzione $y = \arctan x$ si ha: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\tan y - y}{\tan^3 y} = \frac{1}{3}$.

In tal modo abbiamo calcolato il valore dei limiti $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} = \frac{1}{6}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3}$ e $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \frac{1}{3}$ senza far uso dei teoremi di de l'Hôpital o della formula di Taylor, anticipando così risultati che in quasi tutti i testi scolastici e universitari vengono riportati nel contesto degli argomenti successivi alla derivazione.

Sia ora $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, utilizzando il teorema di generalizzazione proviamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

A tal proposito notiamo che $f(x) = -\frac{\ln 2}{x} + 2\frac{\ln 2x}{2x}$ ed essendo $\ln x < x$ per ogni $x \in [1; +\infty[$, f è ivi limitata.

Valgono tutte le ipotesi del teorema di generalizzazione, infatti, le funzioni $g(x) = -\frac{\ln 2}{x}$ e $h(x) = 2$ sono convergenti in $x_0 = +\infty$, la funzione $F(x) = 2x$ diverge positivamente in $x_0 = +\infty$, verifica la **4)** e la **5)**, e, come già detto, $f(x)$ è limitata. Pertanto, risulta, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\lim_{x\to+\infty} g(x)}{1-\lim_{x\to+\infty} h(x)} = \frac{0}{-1} = 0$.

Il problema del calcolo del limite utilizzando solo i limiti notevoli è sorto come conseguenza del fatto che molti studenti eseguono con disinvoltura la sostituzione degli infinitesimi commettendo errori e sono state tratte considerazioni di carattere didattico che di seguito vengono riportate.

Analizziamo la seguente dimostrazione

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x^2+x\sin x+\sin^2 x}{x^2+x\sin x+\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3-\sin^3 x}{x^3\left(x^2+x\sin x+\sin^2 x\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3-\sin x\left(1-\cos^2 x\right)}{x^3\left(x^2+x\sin x+\sin^2 x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3-\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3\left(x^2+x\sin x+\sin^2 x\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3-\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{3x^5} =$$

$$= [\mathrm{A}]\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\sin x\frac{x^2}{2}(1+\cos x)}{3x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\frac{1+\cos x}{2}}{3x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos^2\frac{x}{2}}{3x^3} = [\mathrm{B}]\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos^2\frac{x}{2}}{3x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{3x^2} =$$

$$= \frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{12}$$

L'errore è dovuto alla sostituzione nella differenza degli infinitesimi in $[\text{A}]$ e $[\text{B}]$.

Riproponendo il $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{3x^5}$ se si sostituisce a $\sin x$ l'infinitesimo corrispondente alla tabella dei limiti notevoli si ottiene:

$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x(1-\cos x)(1+\cos x)}{3x^5}=\frac{1}{9}$. Mentre se sostituiamo a $(1-\cos x)$ sempre l'infinitesimo corrispondente della tabella dei limiti notevoli si ottiene: $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\frac{x^2}{2}\sin x(1+\cos x)}{3x^5}=\frac{5}{36}$. Visto i risultati diversi si potrebbe pensare allora di sostituire ad entrambe le funzioni gli infinitesimi corrispondenti, ottenendo però il risultato già analizzato precedentemente.

Si potrebbe allora pensare di sostituire contemporaneamente ad entrambi gli addendi del numeratore e/o del denominatore i corrispondenti infinitesimi dei limiti notevoli ma si potrebbero ottenere sempre degli errori. Infatti, gli ulteriori due esempi che seguono mostrano come gli alunni potrebbero deliberatamente eseguire sostituzioni con errori nel calcolo dei limiti.

1. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\cos x}-\log^2\left(1+\sqrt{x}\right)-1}{\sqrt{\sin x-x\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{\sin x-x\cos x}}=$$
$$=\sqrt{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{-x(1-\cos x)}{\sqrt{x^3}}=0$$

mentre il limite è uguale: $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\cos x}-\log^2\left(1+\sqrt{x}\right)-1}{\sqrt{\sin x-x\cos x}}=\sqrt{3}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x\cos x} - \log^2\left(1+\sqrt{x}\right) - 1}{\sin x - x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x\left(1-\cos x\right)}{x\left(1-\cos x\right)} = -1$ mentre il limite è uguale a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x\cos x} - 1 - \log^2\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sin x - x\cos x} = +\infty$.

In entrambi gli esempi, l'errore è dovuto al fatto che le funzioni $f\left(x\right) = e^{x\cos x} - \log^2\left(1+\sqrt{x}\right) - 1$ e $g\left(x\right) = \sqrt{\sin x - x\cos x}$ sono infinitesime dello stesso ordine di $h\left(x\right) = \sqrt{x^3}$ e nel calcolo del limite utilizzando la sostituzione degli infinitesimi equivalenti sarebbe praticamente impossibile stabilirne l'ordine a priori sulla base dei limiti notevoli.

Da quanto provato segue allora che nella pratica si compiono sugli infinitesimi alcune manipolazioni algebriche, che li rendono molto utili, commettendo, però, un grave ma comunissimo errore e cioè che se ad una funzione infinitesima di ordine superiore rispetto ad f aggiungiamo un'altra funzione con la stessa proprietà, non miglioriamo la nostra conoscenza della prima, pertanto, nelle differenze di funzioni infinitesime non è possibile sostituire ad una delle due funzioni l'infinitesimo corrispondente senza conoscere con esattezza l'ordine dell'infinitesimo differenza.

Va comunque sottolineato che l'utilizzo degli infiniti e infinitesimi è molto utile nel calcolo dei limiti e deve essere proposto in ogni ordine scolastico che ne preveda il loro studio, evidenziando però che la sostituzione può avvenire solo in alcuni casi, come il prodotto e il quoziente di funzioni.