Il sottoscritto dichiara ai sensi dell'art. 47 del D.P.R. 28/12/2000, n.445 che la seguente copia è conforme all'originale pubblicato sul periodico della Mathesis, serie VII volume 3 numero 2 Aprile-Giugno 1996

**Luigi Taddeo***

# A PROPOSITO DI Π

Uno dei problemi più famosi della matematica classica è il problema della rettificazione della circonferenza. Problema che molto spesso viene tirato in ballo da persone, anche di cultura, senza far capire se nel senso di un problema molto complicato da risolvere o se irrisolvibile. Tale problema consiste nel costruire, dato il raggio r e facendo uso solo di riga e compasso, un segmento avente la stessa lunghezza della circonferenza. Poiché la lunghezza della circonferenza è $2\pi r$, il problema equivale a trovare, dato il segmento unitario, un segmento di lunghezza $2\pi$. Dopo secoli di tentativi si è dimostrato che tale problema non è risolvibile.
Nella prima parte di questo lavoro si richiamano i risultati fondamentali di algebra che si utilizzano per dimostrare l'impossibilità della risoluzione del problema; nella seconda parte si presentano alcuni metodi di approssimazione di $\pi$, l'ultimo dei quali usa la definizione classica di $\pi$ come rapporto costante tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro e, visto che usa solo elementi di geometria piana e di trigonometria, può essere presentato a studenti, per esempio, di una quarta liceo scientifico. Nell'ultima parte si presentano due programmi per l'approssimazione di $\pi$, mettendo in evidenza la velocità di convergenza dell'uno rispetto all'altro.

## RICHIAMI DI ALGEBRA

**Definizione 1**: Un numero, reale o complesso, si dice algebrico su **Q** se esso è radice di una equazione algebrica $f(x) = 0$ a coefficienti in **Q** (e quindi in **Z**).

**Proposizione 1** L'insieme dei numeri algebrici, con le ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione, è un campo (in particolare, se a e b sono algebrici, allora lo sono anche $a + b$ e $a\times b$).

**Proposizione 2** L'insieme dei numeri algebrici è numerabile, cioè può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme **N** dei numeri naturali.

**Osservazione 1**: Un numero reale o complesso è detto trascendente su **Q** se non è algebrico su **Q**. Quindi l'insieme dei numeri reali può essere ripartito in due sottoinsiemi, quello dei numeri algebrici e quello dei numeri trascendenti e, poiché **R** ha la potenza del continuo, per la proposizione 2, l'insieme dei numeri reali trascendenti ha la potenza del continuo.
Si presenta il problema di stabilire, dato un numero reale a, definito in qualche modo, se è algebrico o trascendente.
In generale, risolvere questo problema è molto difficile (evidentemente la risposta dipende dal modo con cui è definito a; per esempio, se a è formato da un'espressione contenente solo operazioni razionali

e radici di numeri razionali, come vedremo nel caso in cui le radici sono quadratiche, risulta facile stabilire che a è algebrico).
A tale proposito sono fondamentali i seguenti due teoremi:

*docente di matematica e fisica presso l'istituto "S. Pizzi" di Capua (CE)

**Teorema di Lindemann**

Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono numeri algebrici tutti distinti e se i coefficienti $c_i$ sono algebrici allora

$$c_1 e^{\lambda_1} + \ldots + c_n e^{\lambda_n} \neq 0$$

**Teorema di Gelfond**

Se α, β sono algebrici , con α≠0 e α≠1 e β non è razionale, allora $\alpha^\beta$ é trascendente.

**Corollario al teorema di Lindemann**

I numeri $\pi$ ed $e$ sono trascendenti.

Dim. :

$\pi$ è trascendente. Infatti, se per assurdo, $\pi$ fosse algebrico, poiché $i$ è algebrico per la proposizione 1, anche $\pi i$ sarebbe algebrico. Posto $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $\lambda_1 = i\pi$ e $\lambda_2 = 0$ si avrebbe $e^{i\pi} + e^0 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) + 1 = 0$ contro il teorema di Lindemann.
Anche $e$ è trascendente poiché se, per assurdo, fosse algebrico allora presi $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\quad c_1 = e \quad c_2 = -1$ otteniamo $ee^1 - e^2 = e^2 - e^2 = 0$ contro il teorema di Lindemann.
La dimostrazione può essere condotta anche in maniera diversa: se $e$ fosse algebrico su **Q** allora sarebbe radice di un'equazione del tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, ma allora, posto $c_i = a_i$ e $\lambda i = i$ con $i \in \{0,..,n\}$, si avrebbe $c_0 e^{\lambda_0} + c_1 e^{\lambda_1} + \ldots + c_n e^{\lambda_n} = 0$ contro il teorema di Lindemann.

**Definizione 2**: Sia a ∈ **R**; si definisce ampliamento algebrico del campo **Q** mediante il numero a (o più numeri a, b,...) il più piccolo sottocampo di **R** che contiene **Q** e l'elemento a (gli elementi a, b, ...) e il suo sostegno si ottiene operando in modo razionale con a (gli elementi a, b, ...) e gli elementi di **Q**.
Tale campo si indica con **Q**(a) oppure con **Q**(a, b, ...).

Analogamente si definisce l'ampliamento algebrico di un qualsiasi campo $\mathbf{\Gamma}$, sottocampo di **R**, nel seguente modo:

**Definizione 3**: Dato un campo $\mathbf{\Gamma}$ , poniamo $\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{\Gamma}(\sqrt{a})$ dove $a \in \mathbf{\Gamma}$ e $\sqrt{a} \notin \mathbf{\Gamma}$. $\mathbf{\Gamma}_1$ è detto ampliamento euclideo del primo ordine di $\mathbf{\Gamma}$ costruito a partire dall'elemento a. Posto $\mathbf{\Gamma}_2 = \mathbf{\Gamma}_1(\sqrt{a_1})$ dove $a_1 \in \mathbf{\Gamma}_1$ e $\sqrt{a_1} \notin \mathbf{\Gamma}_1$ $\mathbf{\Gamma}_2$ è detto ampliamento euclideo del secondo ordine di $\mathbf{\Gamma}$, e così via per gli ordini successivi.

Vale il seguente teorema:
**Teorema 1**: Preso un segmento come unitario allora un altro segmento è costruibile con riga e compasso, a partire da questo preso come unitario, se e solo se esso appartiene ad un ampliamento euclideo del campo **Q** di un qualsiasi ordine.

Più in generale, si ha:

**Teorema 1'**: Assegnato un riferimento cartesiano ortogonale e monometrico, un punto è costruibile con riga e compasso, a partire dai segmenti unitari degli assi di riferimento, se e solo se le sue coordinate appartengono ad un ampliamento euclideo del campo **Q** di un ordine qualsiasi.

Dimostrazione
Per quanto riquarda la necessarietà osserviamo che un punto che può essere costruito utilizzando i dati, con riga e compasso, si ottiene intersecando rette congiungenti punti a coordinate intere, oppure una retta di questo tipo e una circonferenza con centro in un punto a coordinate intere ed avente raggio uguale alla distanza tra due punti a coordinate intere, oppure intersecando due circonferenze di questo tipo. In ogni caso le equazioni delle rette e delle circonferenze suddette hanno coefficienti razionali e i sistemi le cui soluzioni ci danno le coordinate dei punti di intersezione sono o di secondo grado o riconducibili a quelli di secondo grado( apparentemente di quarto grado nel caso di due circonferenze). Una soluzione, dunque, di uno qualunque di questi sistemi è formata da numeri appartenenti o a **Q** o a un ampliamento euclideo di **Q** di ordine 1 ottenuto con l'introduzione di una radice quadrata. Considerati tutti i punti costruibili in tal modo avremo che le loro coordinate appartengono ad un ampliamento euclideo di un certo ordine h, che indichiamo con $\mathbf{Q_h}$ . Pensando a punti che si possono costruire con riga e compasso a partire non solo dai dati ma anche dai punti costruiti nel modo detto prima, si ha che le loro coordinate sono soluzioni di sistemi di primo o secondo grado a coefficienti appartenenti a $\mathbf{Q_h}$ e , quindi, tutti i punti costruibili in tal modo, come prima, hanno le coordinate appartenenti ad un ampliamento euclideo di **Q**, di ordine k>h.Utilizzando i punti via via che si costruiscono e con lo stesso ragionamento di prima, si conclude che se un punto è costruibile con riga e compasso allora le sue coordinate appartengono ad un ampliamento euclideo di **Q**.
Per la sufficienza osserviamo che se un punto ha le coordinate che appartengono ad un ampliamento euclideo di **Q** nelle espressioni che le rappresentano figureranno operazioni razionali (somme, prodotti e quozienti) e di estazione di radici quadrate di numeri interi. Teniamo presente che, con riga e compasso, è possibile costruire, a partire dai segmenti di misura rispettivamente a , b e c con un riporto il segmento di misura:
1) a+b
2)ab/c con la costruzione del quarto proporzionale dopo c, a e b, applicando il teorema di Talete
3)$\sqrt{a\,b}$ con la costruzione del medio proporzionale, applicando uno dei teoremi di Euclide
Se ne deduce che è costruibile con riga e compasso, effettuando nell'ordine giusto le suddette costruzioni, il punto $\mathbf{P_x}$ dell'asse x avente ascissa uguale all'ascissa data e il punto $\mathbf{P_y}$ dell'asse y avente ordinata uguale all'ordinata data. A partire da questi due punti si costruisce il punto dato tracciando le perpendicolari da $\mathbf{P_x}$ e $\mathbf{P_y}$ rispettivamenti agli assi x e y.

**Osservazione 2**
Se, oltre ai segmenti unitari, sono assegnati altri segmenti di misure note e rispettivamente a, b, c....., allora il teorema si generalizza affermando che un punto è costruibile con riga e compasso se e solo se le sue coordinate appartengono ad un ampliamento euclideo di un qualsiasi ordine del campo dei dati Q(a,b,c.....).
**Teorema 2**: Se a appartiene ad un ampliamento euclideo di **Q** allora a è algebrico.

Tralasciamo la dimostrazione del teorema e consideriamo solo un caso particolare che dà l'idea della dimostrazione generale.

Se a appartiene ad un ampliamento euclideo di **Q** allora a sarà, per esempio, del tipo $\sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.
Posto allora x = $\sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$ avremo $x^2 = 2 + \sqrt{3-\sqrt{5}}$ e, elevando successivamente al quadrato e portando al primo membro, si ottiene

$$[(x^2 - 2)^2 - 3]^2 - 5 = 0 \qquad (1)$$

e quindi a è algebrico perché radice dell'equazione (1).

I teoremi 1 e 2 e il teorema di Lindemann mostrano chiaramente che non è possibile costruire con riga e compasso un segmento di lunghezza π a partire da uno preso come unitario. Infatti, se il segmento di misura π fosse costruibile a partire di quello unitario, allora π dovrebbe appartenere ad un ampliamento euclideo di **Q** (teorema 1) ma allora π sarebbe algebrico (teorema 2) e ciò è assurdo (corollario del teorema di Lindemann).
Strettamente legato al problema della rettificazione della circonferenza è il problema della quadratura del cerchio. Esso consiste, sempre facendo uso solo di riga e compasso, nel costruire un quadrato equivalente ad un cerchio. Anche questo problema è irrisolvibile; infatti, se prendiamo il cerchio di raggio unitario, allora il problema equivale a costruire il quadrato di lato $\sqrt{\pi}$. L'insieme dei numeri algebrici è un campo (proposizione 1) e pertanto se a e b sono algebrici anche ab è algebrico. In particolare, se a è algebrico, anche $a^2$ è algebrico. Quindi se $\sqrt{\pi}$ fosse algebrico, tale dovrebbe essere anche $(\sqrt{\pi})^2 = \pi$, il che non è.
È chiaro che i problemi della rettificazione della circonferenza e della quadratura del cerchio diventano risolvibili, e in modo anche molto semplice, se togliamo la condizione di usare solo riga e compasso.
La trascendenza di π implica, in particolare, l'irrazionalità di π e quindi il problema di determinarne una sua approssimazione.
La seconda parte di questo lavoro si occupa, appunto, di tre metodi di approssimazione di π.

## PRIMO METODO

### RICHIAMI DI ANALISI

Sia $f(x)$ una funzione avente derivate di qualsiasi ordine in un intorno di $x_0$ $(I_{x_0})$ possiamo allora considerare la serie di Taylor relativa ad f nel punto $x_0$

(1) $$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Ci chiediamo in quali ipotesi la serie (1) converge ed ha per somma $f$.
Sussiste a tale proposito il seguente:

**Teorema 3**
Se f ha derivate di qualsiasi ordine in un intorno $I(x_0)$ e se le sue derivate sono equilimitate in $I(x_0)$ cioè se $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \quad \forall n \in N$ e $\forall x \in I$ allora

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Inoltre $\forall$ x $\in I_{x_0}$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} \frac{(x_0)}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - x_0)^n dx \qquad \text{avendo posto} \qquad f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$$

Consideriamo la funzione $f(x) = arctg(x)$ in ] -1;.1[ . Potremo far vedere che questa funzione verifica le ipotesi del teorema 3 ma seguiremo una strada meno laboriosa. La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ :converge se il modulo di x è minore di 1 ed ha per somma $\frac{1}{1-x}$.

Posto allora x = - $y^2$ avremo 1 - $y^2$ + $y^4$ + ( -1)$^n$ $y^{2n}$ + ... = $\frac{1}{1+y^2}$.

Inoltre, poiché la serie geometrica $\sum_{n \in N} x^n$ converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in ] -1;.1[ , possiamo passare alla serie degli integrali

$$\text{arctg(x)} = \int_0^x \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^x [1 - y^2 + \ldots + (-1)^n y^{2n} + \ldots]dy = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

e, per x=1, otteniamo $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\ldots$ che è convergente, quindi lo sviluppo vale anche per x = 1 e poiché arctg(1) = $\frac{\pi}{4}$, otteniamo $\frac{\pi}{4}=arctg(1)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^n\,\frac{1}{2n+1}+\ldots$ che è il noto sviluppo di $\frac{\pi}{4}$ di Leibnitz

## Secondo metodo

Un'altra approssimazione di π è fornita dallo sviluppo in serie di Fourier.
Ricordiamo che $f$ è sviluppabile in serie di Fourier in [-π,π] se

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n sin(nx\ )) \qquad (2)$$

con $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sin(nx)dx$

Per quanto riguarda la sviluppabilità di $f(x)$ in serie di Fourier sussiste la seguente proposizione che rappresenta un caso particolare di un teorema più generale

### Proposizione 3

Se $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso [-π,π] ed ammette al più un numero finito di minimi e massimi, allora

a) la serie $\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n sin(nx))$ converge ovunque in [-π,π]

b) ∀ $x_0$ ∈ [-π,π] si ha $f(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty}(a_n\cos(nx_0)+b_n sin(nx_0))$

c) in x = -π e in x = π la serie ha per somma $\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$

Consideriamo dunque la funzione $f(x)=x^2$ in [-π,π] e sviluppiamola in serie di Fourier.
Poiché *f(x)* è pari, cioè $f(x)=f(-x)$, allora i coefficienti $b_n$ sono tutti nulli.

Gli $a_n$ sono dati da

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2 sin(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2} - \frac{2sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} = \left[\begin{array}{ll} \frac{4}{n^2} & \text{per n pari} \\ -\frac{4}{n^2} & \text{per n dispari}\end{array}\right.$$

Quindi da $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos(nx)$ otteniamo $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$

Per x=π si ha $\cos(nx) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ se n è pari} \\ -1 \text{ se n è dispari}\end{array}\right.$ quindi $(-1)^n\cos(nx) = 1$ per ogni n pari o dispari e la serie, per x=π diventa $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$ . Per la proposizione 3 tale somma deve essere uguale a

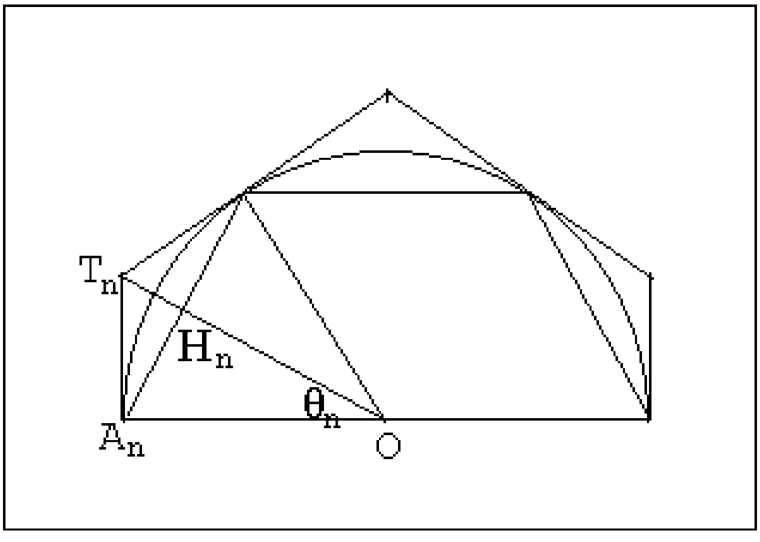
$$\frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2} = \frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \pi^2 \quad \text{qundi} \quad \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{da cui} \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

che fornisce un metodo di approssimazione di $\pi^2$ e qundi di $\pi$.

Per il calcolo di π, utilizzando la formula $\pi = \sqrt{6 * \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$ possiamo utilizzare i programmi Uno e Due, scritti in Turbo Pascal 6.0, riportati a pagina 9.Essi differiscono solo per il fatto che nel programma Uno non si utilizza il coprocessore matematico mentre lo si utilizza nel programma Due.

## Terzo metodo

Se prendiamo la circonferenza di raggio unitario allora π è uguale alla lunghezza della semicirconferenza. Quindi trovando un'approssimazione di tale semicirconferenza avremmo trovato un'approssimazione di π.



Inscriviamo nella semicirconferenza di raggio unitario una poligonale, dividendola in $2^n$ parti uguali, e circoscriviamo una poligonale ottenuta tracciando dai vertici della poligonale inscritta le tangenti alla semicirconferenza.
Sia $I_n$ la lunghezza della poligonale inscritta e $h_n$ la metà del suo lato, quindi $I_n = 2h_n 2^n = 2^{n+1} h_n$;
sia $C_n$ la lunghezza della poligonale circoscritta e $s_n$ la metà del suo lato, quindi $C_n = 2s_n 2^n = 2^{n+1} s_n$
I triangoli $OH_n A_n$ e $OA_n T_n$ sono simili quindi $OA_n : OH_n = A_n T_n : A_n H_n$ da cui , posto $OH_n = a_n$ ,

$1 : a_n = s_n : h_n$ cioè $s_n = \dfrac{h_n}{a_n}$ $C_n = 2^{n+1} s^n = \dfrac{2^{n+1} h_n}{a_n} = \dfrac{I_n}{a_n}$ ma $a_n = OA\cos(\vartheta_n) = \cos(\vartheta_n)$ e

$$h_n = OA\sin(\vartheta_n) = \sin(\vartheta_n) = \sqrt{1-\cos^2(\vartheta_n)} = \sqrt{1-\cos(\vartheta_n)}\sqrt{1+\cos(\vartheta_n)} =$$
$$= 2\sqrt{\frac{1-\cos(\vartheta_n)}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos(\vartheta_n)}{2}} = 2\sqrt{\frac{1-a_n}{2}}\sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$$

$h_{n+1} = \sin(\vartheta_{n+1})$ e poiché nel passare da n ad n+1 il numero dei lati raddoppia e quindi l'angolo dimezza allora $a_{n+1} = \cos(\vartheta_{n+1}) = \cos(\dfrac{\vartheta_n}{2}) = \sqrt{\dfrac{1+\cos(\vartheta_n)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}$

$$h_{n+1} = sin(\vartheta_{n+1}) = sin(\frac{\vartheta_n}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(\vartheta_n)}{2}} = \sqrt{\frac{1-a_n}{2}}$$

$h_n = 2\sqrt{\dfrac{1-a_n}{2}}\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}} = 2h_{n+1}\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}$ da cui $2\dfrac{h_{n+1}}{h_n} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}}$ ma

$I_{n+1} = 2^{n+2} h_{n+1}$ e $I_n = 2^{n+1} h_n$ quindi $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 2\dfrac{h_{n+1}}{h_n} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}}$

e poiché $C_n = \dfrac{I_n}{a_n}$ allora $C_{n+1} = \dfrac{I_{n+1}}{a_{n+1}} = I_{n+1}\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{I_n}{\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}} = \dfrac{2I_n}{1+a_n}$

cioè $\dfrac{1}{C_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{I_n} + \dfrac{a_n}{I_n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{I_n} + \dfrac{1}{C_n}\right)$ quindi $C_{n+1}$ è la media armonica tra $I_n$ e $C_n$

Inoltre $I_{n+1} = \dfrac{I_n}{\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}} = \sqrt{I_n}\dfrac{\sqrt{I_n}}{\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}} = \sqrt{I_n}\sqrt{C_{n+1}} = \sqrt{I_n C_{n+1}}$

Cioè $I_{n+1}$ è la media geometrica tra $I_n$ e $C_{n+1}$.

Per il calcolo di $\pi$ possiamo utilizzare i programmi **Tre** e **Quattro**, scritti in Turbo Pascal 6.0, riportati a pagina 10 e 11.Essi, come per i programmi Uno e Due, differiscono solo per l’uso o meno del coprocessore matematico.

```
PROGRAM Uno;

{$N+}
Uses Crt;

 Var    n, i              : LongInt;
        somma             : Double;

 Begin
         ClrScr;
         Write ('Inserisci il numero di iterazioni  ');
        ReadLn(n);
        somma:=0;
        For i:=1 To n Do   somma:= somma + 1/(i*i);
        somma:=  Sqrt(6*somma);
        WriteLn;
        WriteLn('somma  = ',somma:20:17);
        WriteLn('pi     = ',Pi:20:17);
        Repeat Until KeyPressed
 End.
```

```
PROGRAM Due;

 Uses Crt;

 Var    n, i       : LongInt;
        somma : Real;

 Begin
        ClrScr;
        Write ('Inserisci il numero di iterazioni  ');
        ReadLn(n);
        somma:= 0;
        For i:=1 To n Do   somma:=  somma + 1/(i*i);
        somma:=  Sqrt(6*somma);
        WriteLn;
         WriteLn('somma  = ',somma:15:10);
         WriteLn('pi     = ',Pi:15:10);
        Repeat Until KeyPressed
End.
```

Utilizzando i programmi **Uno** e **Due** su un Compaq 386/20 Mhz con e senza coprocessore 80387, si ottengono i seguenti risultati

| Iterazioni | 80387 | Valore approssimato di π | Valore di π noto al T-Pascal |
|---|---|---|---|
| 10000 | No | **3,1414**971639 | **3,1415926535897935** |
| 11000 | No | **3,1415**058445 | **3,1415926535897935** |
| 15000 | No | **3,1415**289930 | **3,1415926535897935** |
| 20000 | No | **3,1415**449079 | **3,1415926535897935** |
| 10000 | si | **3,141**49716394721423 | **3,1415926535897935** |
| 11000 | si | **3,1415**2899308957867 | **3,1415926535897935** |
| 20000 | si | **3,1415**4490793769403 | **3,1415926535897935** |

Come si vede dalla tabella,dopo 10000 iterazioni si hanno solo 3 cifre decimali esatte e da 11000 a 20000 se ne ottiene solamente un'altra. Ciò dimostra che la convergenza è molto lenta.

PROGRAM **Tre**;

```
        {$N+}
        Uses Crt;
Const max = 100;
Var     n,t                     : Integer;
        i, c, mc                : Array [1..max] Of Double;
Begin
        ClrScr;
        Write ('inserisci il numero di iterazioni (n<‘,max,’): ');
        ReadLn(n);
         t:=1;
        i[1]:= 2*Sqrt(2);
        c[1]:= 4;
        Repeat
                 mc[t+1]:=  (1/i[t]+1/c[t])/2;
                c[t+1]:= 1/mc[t+1];
                i[t+1]:=  Sqrt(c[t+1]*i[t]);
                t:= t+1
        Until t > n-1;
        WriteLn;
         WriteLn('i  = ',i[n]:20:17);
        WriteLn('c  = ',c[n]:20:17);
        WriteLn('pi = ',Pi:20:17);
        Repeat Until KeyPressed
End.
```

```
PROGRAM Quattro;

        Uses Crt;
 Const max=100;
Var     n,t                 : Integer;
         i, c, mc           : Array [1..max] Of Real;
 Begin
         ClrScr;
        Write ('Inserisci il numero di iterazioni (n<‘,max,’): ');
        ReadLn(n);
         t:= 1;
        i[1]:= 2*Sqrt(2);
        c[1]:=  4;
         Repeat
                mc[t+1]:= (1/i[t]+1/c[t])/2;
                c[t+1]:= 1/mc[t+1];
                i[t+1]:= Sqrt(c[t+1]*i[t]);
                 t:= t+1
        Until t > n-1;
        WriteLn;
        WriteLn('i  = ',i[n]:12:10);
         WriteLn('c  = ',c[n]:12:10);
        WriteLn('pi = ',Pi:12:10);
        Repeat Until KeyPressed
End.
```

Utilizzando i programmi **Tre** e **Quattro** su un Compaq 386/20 Mhz con e senza coprocessore 80387, si ottengono i seguenti risultati

| **Numero iterazioni** | **80387** | **Valore approssimato di π** per difetto | **per eccesso** | **Valore di π noto al T-Pascal** |
|---|---|---|---|---|
| 10 | si | **3,141591**42151120019 | **3,141595**11774958933 | **3,1415926535897935** |
| 15 | si | **3,14159265**238659113 | **3,14159265**599619708 | **3,1415926535897935** |
| 20 | si | **3,1415926535**8861806 | **3,1415926535**9214279 | **3,1415926535897935** |
| 25 | si | **3,14159265358979**178 | **3,14159265358979**534 | **3,1415926535897935** |
| 10 | no | **3,141591**4215 | **3,141595**1177 | **3,1415926535897935** |
| 15 | no | **3,14159265**24 | **3,14159265**60 | **3,1415926535897935** |
| 18 | no | **3,1415926536** | **3,1415926536** | **3,1415926535897935** |

Dalla tabella si vede che dopo soltanto 10 iterazioni si ottengono 5 cifre decimali esatte ed all'aumentare solo di 5 iterazioni se ne ottengono altre 3. Quindi in questo caso la convergenza è molto veloce.

## BIBLIOGRAFIA


1) M. Curzio: "Lezioni di algebra" Liguori

2) M.J.Vigodskij: Manuale di matematica superiore Ed. Mir

3) Prodi - Magenes Elementi di analisi matematica per il triennio delle scuole superiori D'Anna

4) A.G.Kuros Corso di algebra superiore Editori Riuniti

5)M.Dedò Matematiche elementari Vol.I-II Liguori

6)A. Morelli Appunti delle lezioni del corso di matematiche complementari 1990 Opera Universitaria di Napoli