

# SEMPLIFICAZIONI delle frazioni algebriche

$$\frac{\cancel{25}^5}{\cancel{10}_2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\cancel{3}(x-\cancel{2})}{(x-\cancel{2})^2(x+3)} = \frac{3}{(x-2)(x+3)}$$

C.E.  $x \neq 2$   
 $x \neq -3$

1) ESEMPIO

$$\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3})(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

C.E.  $x \neq 3$   $x \neq -3$

C.E. PRIMA  
DI SEMPLIFICARE

2) ESEMPIO

$$\frac{x-4}{4-x} = \frac{\cancel{x-4}}{-\cancel{(x-4)}} = -1$$

C.E.  
 $x \neq 4$

Come nelle frazioni numeriche, applicando la proprietà invariantiva, possiamo semplificare una frazione algebrica per ridurla ai minimi termini.

È necessario scomporre in fattori il numeratore e il denominatore e poi dividere ciascuno di essi per i fattori comuni, dopo averli posti diversi da 0. **QUINDI BISOGNA TROVARE LE C.E. LE C.E. SI TROVANO PRIMA DI SEMPLIFICARE**

## ESERCITAZIONE n°1

Semplifichiamo la frazione algebrica

$$\frac{x^4 - 16}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$$

Scomponiamo il numeratore con la differenza di quadrati:

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2).$$

Scomponiamo il denominatore mediante raccoglimento parziale:

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = x^2(x - 2) + 4(x - 2) = (x^2 + 4)(x - 2).$$

Prima di semplificare, troviamo le condizioni di esistenza ponendo il denominatore diverso da 0:

$$(x^2 + 4)(x - 2) \neq 0 \rightarrow \text{C.E.: } x \neq 2.$$

$$x^2 + 4 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Semplifichiamo:

$$\frac{x^4 - 16}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} = \frac{\cancel{(x^2 + 4)}(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x^2 + 4)}\cancel{(x - 2)}} = x + 2.$$

## ESERCITAZIONE N°2

$$\frac{3a^2b^3c^4}{15ab^5c^6} = \frac{a}{5b^2c^2}$$

$$\text{C.E.} \\ 15a^5b^5c^6 \neq 0$$

$$a \neq 0$$

$$b^5 \neq 0$$

$$c^6 \neq 0$$

$$\begin{array}{l} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{array}$$

### Frazioni algebriche e segno meno

Consideriamo la frazione  $\frac{x-5}{2x-1}$ .

- Come si può cambiare segno al numeratore o al denominatore ottenendo una frazione equivalente?
- In quali modi si può scrivere la sua frazione opposta?

#### Segni meno e frazioni equivalenti.

Per rispondere alla prima domanda, partiamo da una frazione numerica. Otteniamo frazioni equivalenti se usiamo due segni  $-$ . Applichiamo la regola dei segni:

$$\frac{4}{7} = \frac{-4}{-7} = \frac{-4}{-7} = \frac{-4}{-7}.$$

Per ottenere frazioni algebriche equivalenti, usiamo due segni  $-$ :

$$\frac{x-5}{2x-1} = \frac{-(x-5)}{-(2x-1)} = \frac{-(x-5)}{-(2x-1)} = \frac{x-5}{-(2x-1)}.$$

Cambiando segno, concludiamo che:

$$\frac{x-5}{2x-1} = \frac{5-x}{1-2x} = \frac{5-x}{1-2x} = \frac{x-5}{1-2x}.$$

#### Segni meno e frazioni opposte.

Consideriamo ancora  $\frac{4}{7}$ . La sua frazione opposta è:

$$-\frac{4}{7} = \frac{-4}{7} = \frac{-4}{7}.$$

In modo analogo, scriviamo la frazione opposta di  $\frac{x-5}{2x-1}$  in tre modi diversi, cioè con il segno  $-$  davanti alla frazione, o al numeratore, o al denominatore:

$$-\frac{x-5}{2x-1} = \frac{-(x-5)}{2x-1} = \frac{-(x-5)}{2x-1} \quad -$$

$$-\frac{x-5}{2x-1} = \frac{5-x}{2x-1} = \frac{x-5}{1-2x}.$$

Per ottenere una frazione equivalente a una data si può:

- cambiare segno sia al numeratore sia al denominatore;
- cambiare segno solo al numeratore o solo al denominatore e mettere un segno  $-$  davanti alla frazione.

Per ottenere la frazione opposta a una data si può mettere un segno  $-$  davanti alla frazione, o solo al numeratore, o solo al denominatore.

## IMPORTANTISSIMO

La semplificazione è possibile soltanto dividendo per i **fattori** comuni. **Non** possiamo semplificare addendi, come puoi vedere nell'esempio seguente.

- $\frac{a+1}{a+b}$  è **sbagliato**. Per capirlo, puoi pensare all'analogia frazione numerica

$$\frac{3+1}{3+2} = \frac{4}{5}. \text{ Semplificando il numero 3, otterresti } \frac{\cancel{3}+1}{\cancel{3}+2} = \frac{1}{2} \text{ e non } \frac{4}{5}!$$

## MOLTIPLICAZIONI FRA FRAZIONI ALGEBRICHE

$$\bullet \quad \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}_1} \cdot \frac{\cancel{18}^6}{\cancel{20}_{10}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\bullet \quad \frac{\cancel{3a}^2(\cancel{b-2})}{\cancel{a-3}} \cdot \frac{(a-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{a}(b-2)^{\cancel{2}}} =$$

$$\Rightarrow \frac{3a(a-3)}{b-2}$$

$$\text{C.E.}$$

$$a \neq 3$$

$$a \neq 0$$

$$b \neq 2$$

Per definizione, il **prodotto** di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica in cui:

- il *numeratore* è il prodotto dei numeratori;
- il *denominatore* è il prodotto dei denominatori.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Come per le frazioni numeriche, prima di moltiplicare, cerchiamo di semplificare, quindi:

- scomponiamo in fattori i numeratori e i denominatori;
  - scriviamo le C.E.;
  - semplifichiamo;
  - moltiplichiamo i numeratori tra loro e i denominatori tra loro.
-

### ESERCITAZIONE N°3

Eseguiamo la seguente moltiplicazione.

$$\frac{2a - 2}{a^3 + 2a^2} \cdot \frac{a^2 + 4a + 4}{a + 2} \cdot \frac{a^2 + a}{a - 1} =$$

Scomponiamo in fattori i numeratori e i denominatori.

$$\frac{2\cancel{(a - 1)}}{a^2\cancel{(a + 2)}} \cdot \frac{\cancel{(a + 2)}^2}{\cancel{a + 2}} \cdot \frac{\cancel{a}(a + 1)}{\cancel{a - 1}} =$$

Poniamo le C.E.

$$\text{C.E.: } a \neq 0 \wedge a \neq -2 \wedge a \neq 1$$

Semplifichiamo e moltiplichiamo i numeratori tra loro e i denominatori tra loro.

$$\frac{2(a + 1)}{a}$$

## DIVISIONI FRA FRAZIONI ALGEBRICHE

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{15}$$

$$\frac{a}{a-3} : \frac{a^4}{5} = \frac{\cancel{a}}{a-3} \cdot \frac{5}{\cancel{a^4}^3} = \frac{5}{a^3(a-3)}$$

C.E.  
 $a \neq 3$   
 $a \neq 0$

Per definizione, il **quoziente** di due frazioni algebriche è il prodotto della prima frazione per la reciproca della seconda.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Quindi, per eseguire una divisione ci riconduciamo al metodo che utilizziamo per la moltiplicazione, ma, nel calcolo del quoziente, alle C.E. delle due frazioni bisogna aggiungere la condizione che il divisore sia diverso da **0**, cioè che il denominatore della seconda frazione sia diverso da **0**.

---

## ESERCITAZIONE N°4

Eseguiamo la seguente divisione.

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} : \frac{x^2 + x}{x^2 + 4x + 4} =$$

Scomponiamo in fattori i numeratori e i denominatori.

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} : \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} =$$

Scriviamo le C.E.: devono essere diversi da 0 sia i denominatori delle frazioni che il numeratore del divisore.

$$\text{C.E.: } x \neq \pm 2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -1$$

Moltiplichiamo per il reciproco del divisore.

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{(x+2)^2}{x(x+1)} =$$

Semplifichiamo e moltiplichiamo.

$$\frac{x+2}{x}$$

CONVIENE

INVERTIRE

PRIMA IL

DIVISORE

E POI TROVARE

LE C.E.