Il sottoscritto dichiara ai sensi dell'art. 47 del D.P.R. 28/12/2000, n.445 che la seguente copia è conforme all'originale pubblicato sul periodico della Mathesis, Serie XI, Volume 4, Numero 3, settembre-dicembre 2012-Anno CXXII

ANGOLOIDI STELLARI

Mario Nocera
Liceo Scientifico "A. Diaz" - Caserta

Luigi Taddeo
Scuola Militare Nunziatella - Napoli

SUNTO
In questa breve nota si definiscono dei particolari angoloidi, denominati "***angoloidi stellari***", e si calcola la somma delle loro facce mostrando che essa, sotto certe ipotesi, è maggiore di 360 gradi. Si dimostra, inoltre, che fissando un numero qualsiasi di gradi, comunque grande, è possibile costruire un angoloide stellare avente la somma delle facce maggiore di tale numero.

PREMESSA

Una delle definizioni di angoloide.
Dato un poligono P e un punto V non appartenente al piano del poligono, definiamo angoloide l'insieme delle semirette aventi l'origine in V e che passano per i punti del poligono P.
L'angoloide è *convesso* (Figura 1) se P è un poligono convesso, *concavo* (Figura 2) se P è concavo.

Poligono convesso 1

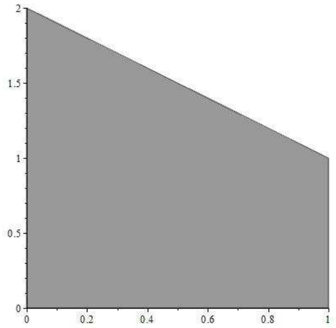
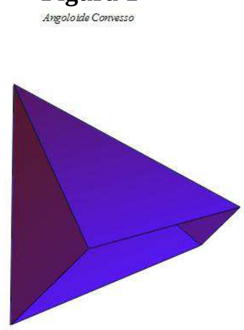


Figura 1



Poligono concavo 1

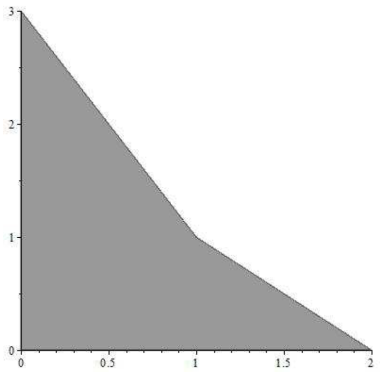
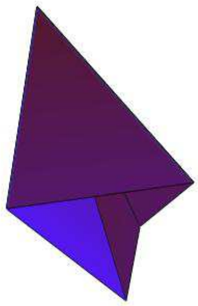


Figura 2



TEOREMA
La somma delle facce di un angoloide convesso è minore di 360 gradi.

PROBLEMA COSTRUIRE UN ANGOLOIDE AVENTE LA SOMMA DELLE FACCE MAGGIORE DI 360 GRADI

Dal teorema precedente ne segue che per risolvere il problema dobbiamo considerare necessariamente un angoloide concavo.
Se l'angoloide è concavo allora si ha che la somma delle facce è maggiore di 360 gradi? In generale no.
L'esempio della Figura2 mostra che un angoloide può essere concavo ma avere la somma delle facce minore di 360 gradi.

Infatti:
considerato il sistema di assi cartesiani $Oxyz$ in cui il vertice dell'angoloide è il punto di $V(0,0,5)$, i vertici del poligono di base sono $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(1,1,0)$ e $C(0,3,0)$. Si ottengono quindi i seguenti vettori:

$\overrightarrow{v_1} = V - O = (0,0,5)$, $\overrightarrow{v_2} = V - A = (-2,0,5)$, $\overrightarrow{v_3} = V - B = (-1,-1,5)$ e $\overrightarrow{v_4} = V - C = (0,-3,5)$. Le facce dell'angoloide sono rispettivamente gli angoli formati dalle seguenti coppie di vettori: $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_3}$ e $\overrightarrow{v_4}$, $\overrightarrow{v_4}$ e $\overrightarrow{v_1}$. Detto α, l'angolo formato da due generici vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, è $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, ne segue che

$$\alpha_1 = \arccos\frac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|} = \arccos\frac{5}{\sqrt{29}}, \quad \alpha_2 = \arccos\frac{\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_3}}{|\overrightarrow{v_2}||\overrightarrow{v_3}|} = \arccos\frac{9}{\sqrt{87}}$$

$$\alpha_3 = \arccos\frac{\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_4}}{|\overrightarrow{v_3}||\overrightarrow{v_4}|} = \arccos\frac{28}{3\sqrt{102}}, \quad \alpha_4 = \arccos\frac{\overrightarrow{v_4}\cdot\overrightarrow{v_1}}{|\overrightarrow{v_4}||\overrightarrow{v_1}|} = \arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$$

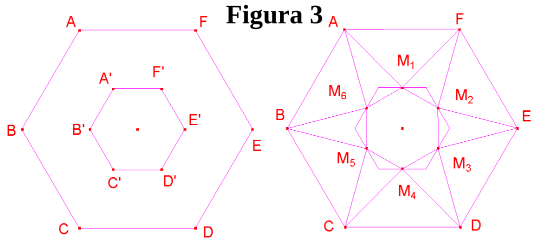
da cui $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \approx 91^0$.

Diamo ora alcune definizioni.

Definizione 1 (Polimargherita regolare PMR):

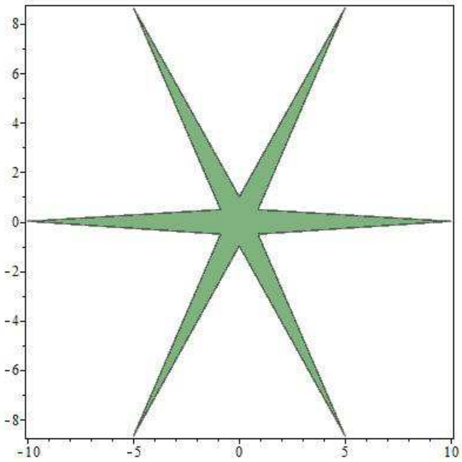
Consideriamo un poligono regolare di $n-$lati, sia esso P_n, e un altro poligono regolare dello stesso numero di lati, sia esso p_n, avente raggio minore, concentrico col precedente e tale che i vertici siano allineati col loro centro comune. Diremo corrispondenti quelli allineati e che si trovano dalla stessa parte del centro. Congiungiamo ogni vertice del poligono di raggio maggiore, con i punti medi di due lati consecutivi del poligono di raggio minore, di estremo comune il vertice corrispondente (Figura 3). Il poligono concavo di $2n-$lati così ottenuto è detto polimargherita regolare, brevemente PMR (Figura 4).

Figura 3



Polimargherita regolare – PMR

Figura 4

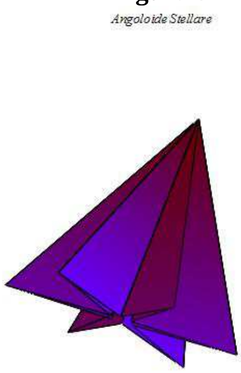


Notiamo che i lati della PMR sono tutti congruenti.

Definizione 2 (Angoloide Stellare):

Consideriamo una PMR e un punto V esterno al piano della PMR e tale che la proiezione di V su questo piano sia il centro della PMR. L'angoloide di vertice V le cui semirette passano per i punti della PMR è detto Angoloide Stellare (Figura 5).

Figura 5



Osserviamo che le facce dell'angoloide, dette *vele* (Figura 6), sono tutte congruenti.

Figura 6

Vela

Per calcolare la somma delle facce dell'angoloide basta trovare l'ampiezza di una *vela* e moltiplicarla per $2n$.

Teorema (Somma delle facce di un Angoloide Stellare)
Siano R il raggio del poligono maggiore, a l'apotema di quello minore, n il numero dei lati dei due poligoni, h l'altezza dell'angoloide (distanza del vertice V dal piano della PMR), allora la somma delle facce dell'angoloide stellare è:

$$\theta = 2n \cdot \arccos \frac{aR\cos\frac{\pi}{n} + h^2}{\sqrt{\left(R^2+h^2\right)\left(a^2+h^2\right)}}$$

Dimostrazione

Consideriamo il sistema di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$, dove O coincide con il centro della PMR, il semiasse positivo delle ascisse passa per un vertice del poligono di raggio R e il vertice V appartiene al semiasse positivo di z. Ne segue che i vertici di una vela sono i punti: $A\left(R,0,0\right)$, $M\left(a\cos\frac{\pi}{n}, a\sin\frac{\pi}{n}, 0\right)$ e $V\left(0,0,h\right)$. Per il calcolo dell'ampiezza della faccia calcoliamo il prodotto scalare tra i vettori $\overrightarrow{v_1} = V - A = (-R, 0, h)$ e $\overrightarrow{v_2} = V - M = \left(-a\cos\frac{\pi}{n}, -a\sin\frac{\pi}{n}, h\right)$.

Il prodotto scalare tra $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ è $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = aR\cos\frac{\pi}{n} + h^2$.

Inoltre $\left|\overrightarrow{v_1}\right| = \sqrt{R^2 + h^2}$, $\left|\overrightarrow{v_2}\right| = \sqrt{a^2 + h^2}$ e quindi, posto θ_n l'ampiezza della Vela (angolo compreso tra i vettori $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$) si ha:

$$\cos\theta_n = \frac{aR\cos\frac{\pi}{n} + h^2}{\sqrt{(R^2 + h^2)(a^2 + h^2)}} \text{ da cui } \theta_n = \arccos\frac{aR\cos\frac{\pi}{n} + h^2}{\sqrt{(R^2 + h^2)(a^2 + h^2)}}.$$

E quindi la tesi.

Osservazioni.

Dal teorema precedente, poiché $\lim_n \left(2n \cdot \arccos\frac{Ra\cos\frac{\pi}{n} + h^2}{\sqrt{(R^2 + h^2)(a^2 + h^2)}}\right) = +\infty$, si ha che fissato un qualsiasi angolo è possibile costruire un angoloide stellare la cui somma delle facce è sempre maggiore di tale angolo.

Qualche esempio.

Si fissi $n = 6$, $R = 10$, $a = 1$ e $h = 10$ si ottiene un angoloide stellare la cui somma delle facce è circa (per difetto) 481^0 e quindi maggiore di 360^0 (Figura 5).

È utile osservare che se si fissa $n = 3$ (PMR che determina l'angoloide stellare con il minimo numero di facce) è possibile costruire un angoloide stellare con la somma delle facce maggiore di 360^0. Infatti basta prendere $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$, $a = \frac{1}{10\sqrt{3}}$ e $h = 1$ ottenendo così la somma delle facce uguale a circa 471^0, mentre per $n = 3, R = 10$, $a = 4$ e $h = 10$ si ha come somma circa 228^0.