Pillole di calcolo combinatorio

Roberto Paoletti*

Il principio di moltiplicazione. Lo scopo del calcolo combinatorio é contare vari tipi di possibili scelte in svariate situazioni. Alla base della nostra breve ed elementare escursione nel calcolo combinatorio vi é l'importante *principio di moltiplicazione*, che qui enunciamo.

In generale, una scelta puó essere fatta in piú passi, poniamo N. Supponiamo che per ogni $k = 1, \ldots, N$ la scelta da compiere al k-mo passo possa essere fatta in n_k modi. Il principio di moltiplicazione dice che allora il numero totale di possibili scelte é il prodotto

$$n_{\text{tot}} = n_1 \cdot n_2 \cdots n_{N-1} \cdot n_N. \tag{1}$$

Esempio 1. Il signor Rossi si alza la mattina e apre l'armadio per vestirsi e andare al lavoro. Nel guardaroba trova 3 giacche, 4 camicie, 5 paia di pantaloni (tutti i capi sono diversi tra loro) e nella scarpiera 4 paia di scarpe. Quante possibilitá di scelta ha?

Il Sig. Rossi puó scelgiere prima la giacca, poi la camicia, poi il paio di pantaloni, poi il paio di scarpe. Quindi le possiblitá di scelta sono in numero di $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 240$.

Esempio 2. Il responsabile di una rete televisiva deve stabilire la programazione in prima serata della prossima settimana. In prima serata la sua rete trasmette sempre un film e in magazzino ci sono 30 film. In quanti modi puó fare la sua scelta?

Puó scegliere prima il film del lunedí, poi quello del martedí, poi quello del mercoledí, *eccetera*. La prima scelta si puó fare in 30 modi, la seconda in 29,... la settima in 24. Le scelte totali sono $30 \cdot 29 \cdots 24$.

*__Address.__ Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Milano Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126 Milano, Italy; **e-mail**: roberto.paoletti@unimib.it

Esempio 3. Consideriamo il prodotto Cartesiano di N insiemi finiti $A_1 \times \cdots \times A_N$, ove $|A_i| = n_i$. Quanti sono gli elementi di $A_1 \times \cdots \times A_N$? In altri termini, in quanti modi si puó scegliere un elemento di $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N$? Un elemento del prodotto Cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_N$ é una N-upla ordinata $(a_1, \ldots, a_N)$ con $a_i \in A_i$ per ogni $i = 1, \ldots, N$. Possiamo scegliere prima $a_1 \in A_1$ in n_1 modi, poi a_2 in n_2 modi, e cosí via fino a a_N in n_N modi. Le possibili scelte sono quindi

$$|A_1 \times \cdots \times A_N| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_N|.$$

Esempio 4. Un professore prepara un testo d'esame su argomenti A, B, C. Ha un elenco di esercizi tra i quali scegliere: 10 esercizi per l'argomento A, 15 per l'argomento B, 20 per l'argomento C. Ogni tema d'esame deve consistere di tre esercizi, uno per ogni argomento. Quanti possibili testi d'esame puó preparare?

Possiamo ragionare come per l'abbigliamento del sig. Rossi. Equivalentemente, possiamo osservare che le scelte sono (in corrispondenza biunivoca con) gli elementi del prodotto Cartesiano $E_A \times E_B \times E_C$, ove E_A é l'insieme degli esercizi per l'argomento A, *eccetera*. Quindi si hanno $10 \cdot 15 \cdot 20 = 3000$ possibili testi d'esame.

Consideriamo il caso particolare in cui tutti gli insiemi di cui si fa il prodotto Cartesiano sono uguali. Sia quindi Ω un insieme e sia

$$\Omega^k = \Omega \times \cdots \times \Omega \quad (k \text{ volte}).$$

Un elemento di Ω^k é una sequenza **ordinata** $(a_1, \ldots, a_k)$ di k elementi di Ω, non necessariamente distinti.

Definizione 1. Per ragioni storiche, una sequenza ordinata di k elementi di Ω, si dice una *disposizione con eventuali ripetizioni di classe* k degli n oggetti in Ω. Porremo, se $n = |\Omega|$,

$$D_r(n, k) = \left|\Omega^k\right|.$$

Per quanto detto,

$$D_r(n, k) = \left|\Omega^k\right| = n \cdot n \cdots n = n^k.$$

Esempio 5. Enumerare le possibili colonne di pronostici $(1, X, 2)$ nel gioco del totocalcio.

Un pronostico é una sequenza $(a_1, \ldots, a_{13})$ ove $a_j \in \{1, X, 2\}$ per ogni j, ovvero un elemento del prodotto Cartesiano $\{1, X, 2\}^{13}$. Si hanno quindi $|\{1, X, 2\}^{13}|$ possibilitá. In parole piú semplici, per scegliere un pronostico del totocalcio dobbiamo fare 13 scelte, una per ogni partita della schedina, e ogni volta ci sono 3 possibilitá. In tutto, ci sono 3^{13} possibilitá.

Esempio 6. Facciamo un esempio astratto: se A é un insieme di cardinalitá r e B é un insieme di cardinalitá s, l'insieme delle mappe $f : A \to B$ ha cardinalitá s^r. Denoteremo tale insieme

$$B^A = \{f : A \to B\}.$$

Quindi,

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}.$$

Infatti, sia $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, ove $m = |B|$, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, ove $n = |A|$. Allora per scegliere $f : A \to B$ possiamo prima scegliere $f(a_1)$ in m modi, poi $f(a_2)$ in m modi, e cosí via. Le scelte totali sono m^n.

Esempio 7. Da un mazzo di 52 carte ne vengono estratte in sequenza r, e a ogni estrazione la carta estratta viene reinserita nel mazzo. Enumerare le possibili estrazioni ordinate.

Si tratta di enumerare le possibili r-uple ordinate di elementi dell'insieme M delle carte del mazzo. Abbiamo $|M^r| = 52^r$ possibilitá. Detto altrimenti, abbiamo r passi e a ogni passo 52 possibilitá. Per il principio di moltiplicazione, abbiamo 52^r possibilitá.

Esempio 8. Da un mazzo di 52 carte ne vengono estratte in sequenza $r \geq 2$, e a ogni estrazione la carta estratta viene reinserita nel mazzo. Enumerare le possibili estrazioni ordinate per le quali la prima e la seconda carta sono degli assi.

Sia $A \subseteq M$ l'insieme degli assi. Si ha $|A| = 4$. Si tratta di enumerare le sequenze ordinate

$$(a_1, a_2, \ldots, a_r) \text{ con } a_1, a_2 \in A \text{ e } a_i \in M \text{ per } i \geq 2,$$

cioé gli elementi del prodoto Cartesiano $A \times A \times M \times \cdots \times M$, che ha cardinalitá $4 \cdot 4 \cdot 52 \cdots 52 = 16 \cdot 52^{r-2}$.

Esempio 9. Da un mazzo di 52 carte ne vengono estratte in sequenza $r \geq 2$, e a ogni estrazione la carta estratta viene reinserita nel mazzo. Enumerare le possibili estrazioni ordinate per le quali la prima e la seconda carta *non* sono degli assi.

L'insieme $A^c = M \setminus A$ delle carte che non sono assi ha cardinalitá $52 - 4 = 48$. Ragionando come sopra, le estrazioni cercate sono in corrispondenza biunivoca con $A^c \times A^c \times M \times \cdots \times M$, che ha cardinalitá $48^2 \cdot 52^{r-2}$.

Esempio 10. Da un mazzo di 52 carte ne vengono estratte in sequenza $r \geq 2$, e a ogni estrazione la carta estratta viene reinserita nel mazzo. Enumerare le possibili estrazioni ordinate per le quali *almeno una* tra la prima e la seconda carta *non* é un asso.

Sia M^r l'insieme delle estrazioni possibili,

$$D = A \times A \times M \times \cdots \times M \subseteq M^r$$

l'insieme delle estrazioni per le quali le prime due carte sono assi. Allora l'insieme delle estrazioni ordinate per le quali almeno una tra la prima e la seconda carta non é un asso é il complementare di D in M^r, e quindi il numero cercato é

$$|D^c| = |M^r| - |D| = 52^r - 16 \cdot 52^{r-2}.$$

Definizione 2. Dato un insieme Ω, l'*insieme delle parti* di Ω, denotato $\mathcal{P}(\Omega)$, é l'insieme di tutti i sottoinsiemi di Ω:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}.$$

Esempio 11. Dato un insieme Ω di cardinalitá n, determinare la cardinalitá di $\mathcal{P}(\Omega)$.

Ordiniamo gli elementi di Ω in un modo modo qualsiasi: $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$. A ogni $A \subseteq \Omega$ facciamo corrispondere una sequenza ordinata

$$\ell_A = (m_1, \ldots, m_n) \in \{0, 1\}^n,$$

come segue: Se $a_j \in A$, poniamo $m_j = 1$; se $a_j \notin A$, poniamo $m_j = 0$. Si ha una corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi di Ω e $\{0, 1\}^n$. Quindi

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = \left|\{0, 1\}^\Omega\right| = 2^n.$$

Esempio 12. Lo straordinario popolo dei bughi-bughi, mito di ogni antropologo, ha un alfabeto di sole 6 lettere. A uno studioso che gli obiettava che con cosí poche lettere la loro lingua deve essere poco espressiva, il capo tribú chiese di calcolare quante parole di 7 lettere si possono comporre con il loro alfabeto.

Le parole di 7 lettere componibili con un alfabeto di 6 lettere sono gli elementi del prodotto Cartesiano A^7, ove A é l'insieme delle 6 lettere dell'alfabeto. Quindi sono in numero di 6^7.

Disposizioni e permutazioni. Sia Ω un insieme finito, fissiamo un intero $1 \leq k \leq |\Omega|$, e sia $\Omega^{(k)} \subseteq \Omega^k$ il sottoinsieme dato dalle k-uple $(a_1, \cdots, a_k)$ con tutti gli a_i distinti tra loro:

$$\Omega^{(k)} = \{(a_1, \ldots, a_k) : a_i \neq a_j \text{ se } i \neq j\}\,.$$

Equivalentemente, $\Omega^{(k)}$ é la collezione dei **sottoinsiemi ordinati** di Ω di cardinalitá k.

Poniamo $n = |\Omega|$ e sia $1 \leq k \leq n$. Come possiamo scegliere una k-upla ordinata $(a_1, \ldots, a_k) \in \Omega^k$ con tutti gli a_i distinti tra loro? Innanzitutto, a_1 puó essere scelto in n modi diversi; scelto che sia a_1, a_2 puó essere uno qualsiasi degli $n-1$ elementi restanti di $\Omega \setminus \{a_1\}$; scelti che siano a_1 e a_2, a_3 puó essere uno qualsiasi degli $n-2$ elementi restanti di $\Omega \setminus \{a_1, a_2\}$, e cosí via fino al k-imo passo. Quindi, moltiplicando tra loro le varie possibilitá si ha

$$\left|\Omega^{(k)}\right| = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Definizione 3. (**Il fattoriale**) Se $n \geq 1$ é un intero, il fattoriale di n é

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Ad esempio, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, *eccetera.* Per convenzione si pone poi $0! = 1$. In generale, si ha $n! = n \cdot (n-1)!$ $(n \geq 1)$.

Definizione 4. Per ragioni storiche, gli elementi di $\Omega^{(k)}$ si dicono **disposizioni di classe** k degli n oggetti in Ω, e si pone

$$D(n, k) = \left|\Omega^{(k)}\right|.$$

In particolare, per $k = n$ si hanno $n!$ elementi in $\Omega^{(n)}$. Quando $k = n$ si usa una terminologia particolare:

Definizione 5. Gli elementi di $\Omega^{(n)}$, ove $n = |\Omega|$, si dicono anche **permutazioni** degli n oggetti in Ω; le permutazioni di un insieme di n oggetti sono, come appena osservato, $n!$.

Esempio 13. Pierino vuole disporre le sue 8 macchinine preferite in fila su uno scaffale. In quanti modi puó disporle?

Si tratta di contare le possibili permutazioni di un insieme di 8 elementi: si hanno $8! = 33600$ possiblitá.

Esempio 14. Don Giovanni ha 7 ragazze, e per non trovarsi in situazioni imbarazzanti vuole dedicare a ciascuna di esse sempre lo stesso giorno della settimana, ma non sa decidersi in quale ordine. In quanti modi puó fare la sua scelta?

Si tratta di contare i modi in cui si puó riordinare un insieme di 7 elementi, che é il numero delle permutazioni di tale insieme: si hanno $7! = 4200$ possibilitá.

Esempio 15. Enumerare le possibili formazioni che l'allenatore di una squadra di calcio puó scegliere avendo a disposizione n giocatori, $n \geq 11$.

Una formazione é fissata scegliendo una sequenza *ordinata* di 11 giocatori tra gli n disponibili. Quindi le formazioni sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $G^{(11)}$, ove G é l'insieme degli n giocatori. Detto ancora altrimenti, con l'aulica terminologia introdotta sopra, si tratta di enumerare le disposizioni a 11 a 11 senza ripetizioni degli n giocatori. Ad esempio, se $n = 18$ abbiamo $18 \cdot 17 \cdots 8 = 18!/7!$ possibili formazioni. In generale, applicando la formula precedente con $k = 11$ ne abbiamo $n \cdot (n-1) \cdots (n-10) = n!/(n-11)!$.

Esempio 16. Enumerare le possibili estrazioni (ordinate) del lotto (senza reimbussolamento: a ogni estrazione non si reinserisce la pallina nell'urna).

Sia Ω l'insieme delle 90 palline nell'urna. Si tratta di enumerare gli elementi di $\Omega^{(3)}$, ovvero le possibili disposizioni (senza ripetizione, poiché non c'é reibussolamento) a 3 a 3 degli elementi di Ω. Si ha $n = 90$, $k = 3$. Abbiamo $90 \cdot 89 \cdot 88 = 90!/87!$ possiblitá.

Esempio 17. Da un mazzo di carte ne vengono estratte 5 una dietro l'altra senza che le carte estratte vengano reinserite nel mazzo. Enumerare le possibili estrazioni, ordinate.

Poiché le carte estratte non vengono reinserite, si tratta di enumerare le disposizioni senza ripetizione a 5 a 5 delle 52 carte del mazzo. In altri termini, contiamo gli elementi di $M^{(5)}$, ove M é l'insieme delle carte del mazzo. Facendo $n = 52$ e $k = 5$, questi sono in numero di $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 52!/47!$.

Esempio 18. Da un mazzo di carte ne vengono estratte 5 una dietro l'altra e le carte estratte vengono ogni volta reinserite nel mazzo. Enumerare le estrazioni, ordinate, per le quali almeno due carte estratte sono uguali.

Le possibili estrazioni ordinate sono gli elementi di M^5. Le estrazioni ordinate per le quali tutte le carte estratte sono distinte sono gli elementi del sottoinsieme $M^{(5)} \subseteq M^5$. L'insieme delle estrazioni ordinate con almeno due carte estratte uguali sono gli elementi del complementare $(M^{(5)})^c$ di $M^{(5)}$ in M^5, e quindi sono in numero di

$$|M^5| - |M^{(5)}| = 52^5 - 52!/47!.$$

Esempio 19. Il leggendario popolo dei cabudé, croce e delizia di ogni linguista, ha un alfabeto di sole 6 lettere e compone solo parole di lettere distinte. Quante parole puó contenere il loro vocabolario?

Ogni parola nel vocabolario dei cabudé ha lunghezza almeno 1 e al piú 6 (lunghezza qui significa ovviamente numero di lettere). Se $1 \leq k \leq 6$, le possibili parole di lunghezza k sono gli elementi di $A^{(k)}$, ove A é l'insieme delle lettere dell'alfabeto. Quindi le parole di lunghezza k sono al piú $\frac{6!}{(6-k)!}$. Le parole totali sono al piú $\sum_{k=1}^{6} \left|A^{(k)}\right| = \sum_{k=1}^{6} \frac{6!}{(6-k)!}$.

Problema 1. Dato un insieme di cardinalitá n, determinare quanti sono i suoi sottoinsiemi di cardinalitá fissata $k \leq n$.

Un sottoinsieme di Ω avente cardinalitá k puó vedersi come una k-upla **non ordinata** di elementi di Ω, e si denota $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$. Quindi ad esempio se $a, b \in \Omega$ allora $(a, b) \neq (b, a)$ mentre $\{a, b\} = \{b, a\}$. Porremo

$$\mathcal{P}_k(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(A) : |A| = k\}.$$

Definizione 6. Per ragioni storiche, un sottoinsieme $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ di Ω di cardinalitá k, ovvero un elemento di $\mathcal{P}_k(\Omega)$, si dice anche una *combinazione* di classe k degli elementi di Ω. Se $|\Omega| = n$, si pone

$$C(n, k) = |\mathcal{P}_k(\Omega)|.$$

Esprimiamo ora $D(n, k) = \left|\Omega^{(k)}\right|$ in termini di $C(n, k)$, usando il principio di moltiplicazione. Essendo $D(n, k)$ noto, potremo ricavare $C(n, k)$. Un elemento di $\Omega^{(k)}$ (cioè una sequenza ordinata di k elementi distinti di Ω) si puó scegliere in due passi: prima scegliamo un sottoinsieme $A \subseteq \Omega$ di cardinalitá k, quindi un ordinamento su A. Ci sono per definizione $C(n, k)$ possibili sottoinsiemi di cardinalitá k in Ω, e per ognuno di questi $k!$ possibili riordinamenti. In definitiva, per il principio di moltiplicazione le possibili scelte di un elemento di $\Omega^{(k)}$ sono $D(n, k) = C(n, k) \cdot k!$, da cui

$$C(n, k) = \frac{D(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Definizione 7. (**Il coefficiente binomiale**) Dati interi $n \geq 1$ e $0 \leq k \leq n$ si pone

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Si ricordi che per convenzione $0! = 1$. Niente di misterioso: é solo una definizione.

Osservazione 1. Si osservi che se $0 \leq k \leq n$ sono interi, allora

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Insiemisticamente, ció corrisponde al fatto che dato un insieme Ω di cardinalitá n e un intero $0 \leq k \leq n$, scegliere un sottoinsieme di cardinalitá k $A \subseteq \Omega$ equivale a scegliere il suo complementare $A^c \subseteq \Omega$, ovvero un sottoinsieme di cardinalitá $n-k$. Quindi,

$$|\mathcal{P}_k(\Omega)| = |\mathcal{P}_{n-k}(\Omega)|\,.$$

Esempio 20. Una maestra con una classe di 30 alunni deve sceglierne 5 per svolgere una ricerca. Quante possibili scelte puó fare?

In questo problema l'ordine non conta: dobbiamo contare i possibili sottoinsiemi di 5 alunni nell'insieme A dei 30 alunni della classe. Il numero é $C(30,5) = \frac{30!}{5!\,25!} = \binom{30}{5}$.

Esempio 21. Un sergente deve scegliere 4 soldati da mandare in avanscoperta tra i 10 del suo plotone. Quante scelte puó fare?

Anche qui l'ordine non conta. Quanti sono i sottoinsiemi di cardinalitá 4 dell'insieme P dei 10 soldati del plotone? Ovviamente, $C(10,4) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = 210$.

Esempio 22. Da un mazzo di 52 carte se ne estraggono 5 che vengono poi mischiate in modo da perdere l'ordine di estrazione. Quante sono le possibili mani estratte?

Dobbiamo contare i sottoinsiemi di cardinalitá 5 dell'insieme M delle 52 carte del mazzo. Il numero cercato é $C(52,5) = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!} = 52\cdot 51\cdot 49\cdot 20$.

Esempio 23. Il noto cuoco parigino Paul Auvent prepara i suoi manicaretti nel modo seguente: egli ha tre scaffali con 7, 6 e 5 ingredienti tutti distinti, rispettivamente, e sceglie 3 ingredienti dal primo, 4 dal secondo e 2 dal terzo; mette tutto in un pentolone con acqua calda e fa bollire per due ore. Quante sono le ricette del repertorio di Paul Auvent?

Siano A, B e C gli insiemi degli ingredienti sul primo, sul secondo e sul terzo scaffale, rispettivamente. Ogni ricetta corrisponde a un elemento del prodotto cartesiano $\mathcal{P}_3(A) \times \mathcal{P}_4(B) \times \mathcal{P}_2(C)$, e quindi le possibili ricette sono in numero di

$$|\mathcal{P}_3(A)| \cdot |\mathcal{P}_4(B)| \cdot |\mathcal{P}_2(C)| = \binom{7}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{2} = 35 \cdot 15 \cdot 10 = 5250$$

Esempio 24. La tribú dei bughi-bughi ha razziato 40 galline dal campo dei boghi-boghi, tribú rivale confinante. Lo sciamano dei bughi-bughi ha decretato che 20 di queste devono essere scelte per un rito propiziatorio, e di queste 20 ben 12 dovranno essere sacrificate alla divinitá X e le restanti alla divinitá Y. Il capo del villaggio bughi-bughi si incarica di scegliere le galline per il sacrificio, ripartite nei due gruppi. Quante sono le possibilitá di scelta?

Sia G l'insieme delle 40 galline razziate. Si possono scegliere $|\mathcal{P}_{20}(G)| = \binom{40}{20}$ diversi sottoinsiemi di galline da sacrificare. Fatta una scelta di un particolare insieme S di galline da sacrificare, tra queste si possono scegliere $|\mathcal{P}_{12}(S)| = \binom{20}{12} = \binom{20}{8}$ insiemi di galline da sacrificare a X. Le possibilitá di scelta sono in tutto (principio di moltiplicazione)

$$|\mathcal{P}_{20}(G)| \cdot |\mathcal{P}_{12}(S)| = \binom{40}{20} \cdot \binom{20}{12} = \frac{40!}{20!\,20!}\,\frac{20!}{8!\,12!} = \frac{40!}{20!\,12!\,8!}.$$

Torneremo su questo risultato parlando di partizioni ordinate.

Partizioni Ordinate. Abbiamo visto che da un insieme Ω di cardinalitá n se ne possono estrarre $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ di cardinalitá fissata $k \leq n$. Se $A \in \mathcal{P}_k(\Omega)$, allora chiaramente $A^c \in \mathcal{P}_{n-k}(\Omega)$ e $\Omega = A \cup A^c$, $A \cap A^c = \emptyset$. Scegliere un sottoinsieme di Ω di cardinalitá k, in altri termini, equivale a scegliere una partizione ordinata di Ω in un insieme di k elementi e in uno di $(n-k)$, $(A, A^c) \in \mathcal{P}_k(\Omega) \times \mathcal{P}_{n-k}(\Omega)$. Piú in generale, introduciamo la seguente:

Definizione 8. Sia Ω un insieme finito di cardinalitá $n = |\Omega|$. Sia r un intero ≥ 1 e siano $(n_1, \ldots, n_r)$ interi ≥ 1 tali che $n = \sum_{i=1}^r n_i$. Diciamo $\mathcal{P}_{(n_1,\ldots,n_r)}(\Omega)$ l'insieme delle partizioni ordinate di Ω in r sottoinsiemi disgiunti di cardinalitá $n_1, \ldots, n_r$, rispettivamente. In altri termini,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{(n_1,\ldots,n_r)}(\Omega) = \{(A_1, \ldots, A_r) \in \mathcal{P}_{n_1}(\Omega) \times \cdots \times \mathcal{P}_{n_r}(\Omega) :\\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j\}.\end{aligned} \tag{2}$$

Ovviamente, se $(A_1, \dots, A_r) \in \mathcal{P}_{(n_1,\dots,n_r)}(\Omega)$, allora

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r;$$

infatti la cardinalitá é additiva in unioni disgiunte e quindi

$$|\bigcup_i A_i| = \sum_i |A_i| = |\Omega|.$$

Problema 2. Siano n e $n_1, \dots, n_r$ come sopra. Cosa é $|\mathcal{P}_{(n_1,\dots,n_r)}(\Omega)|$?

In altri termini, in quanti modi possiamo scegliere una partizione ordinata $(A_1, \dots, A_r)$ di Ω in r sottoinsiemi disgiunti di cardinalitá $n_1, \dots, n_r$? Per fissare le idee, consideriamo il caso $r = 3$. Siano quindi $n_1, n_2, n_3 \geq 1$ con $n_1 + n_2 + n_3 = n = |\Omega|$, e applichiamo il principio di moltiplicazione, scegliendo successivamente $A_1 \in \mathcal{P}_{n_1}(\Omega)$, $A_2 \in \mathcal{P}_{n_2}(\Omega)$, e $A_3 \in \mathcal{P}_{n_3}(\Omega)$ a due a due disgiunti. Innanzitutto, A_1 é un sottoinsieme di Ω di cardinalitá n_1. Quindi vi sono $\binom{n}{n_1}$ possibili scelte per A_1. Scelto che sia A_1, A_2 deve essere un sottoinsieme di cardinalitá n_2 del complementare A_1^c di A_1, il quale ha cardinalitá $n - n_1$. Quindi vi sono al secondo passo $\binom{n-n_1}{n_2}$ possibili scelte per A_2. Scelti che siano A_1 e A_2, A_3 é necessariamente il complementare $(A_1 \cup A_2)^c$ dell'unione disgiunta $A_1 \cup A_2$; si ha infatti $A_3 \subseteq (A_1 \cup A_2)^c$ e $|A_3| = n_3 = n - (n_1 + n_2) = |(A_1 \cup A_2)^c|$. Si hanno quindi in tutto

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_{(n_1,n_2,n_3)}(\Omega)| &= \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \\ &= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!\,n_3!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} = \binom{n}{n_1\,n_2\,n_3}. \end{aligned}$$

In generale, lo stesso ragionamento mostra che

$$|\mathcal{P}_{(n_1,\dots,n_r)}(\Omega)| = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\cdots\,n_r!}.$$

Esempio 25. La maestra di una classe di 30 alunni deve sceglierne 6 per una ricerca di geografia, 7 per una ricerca di storia, 10 per una visita guidata al museo di scienze naturali con una relazione finale, e 7 per una visita analoga alla pinacoteca. Ogni alunno deve partecipare a un progetto. In quanti modi puó fare la scelta dei vari gruppi?

Si tratta di ripartire l'insieme A dei 30 alunni della classe in un sottoinsieme A_G di 6 alunni, un sottoinsieme A_S di 7, un sottoinsieme A_M di 10 e uno A_P di 7. Il numero di scelte possibili é $\frac{30!}{6!\,7!\,10!\,7!}$.

Esempio 26. Il capo di un gruppo di 10 giovani marmotte deve sceglierne 5 per montare le tende, 3 per preparare la cena e 2 per raccogliere la legna. In quanti modi puó fare la scelta?

Si tratta di ripartire l'insieme A_{GM} delle 10 giovani marmotte in un sottoinsieme A_T di cardinalitá 5, uno A_C di cardinalitá 3 e uno A_L di cardinalitá 2. Si hanno $\frac{10!}{5!\,3!\,2!} = 2520$ possibilitá.

Esempio 27. Una banda di 4 scassinatori ha trafugato 7 preziosi diamanti. Il capo, detto il Trucido, incarica il cassiere, detto Svanzika, di suddividere il bottino come segue: 3 diamanti al capo, 2 al cassiere e uno ciascuno ai due ladri semplici Pino e Gino. In quanti modi puó essere fatta la ripartizione?

Ovviamente, in $\frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!} = 420$ modi.

Esempio 28. La rinomata cuoca d'oltralpe Grèthe Suzette vuole presentarsi al pubblico italiano. Per questo, ha selezionato le proprie 10 migliori ricette per farne assaggiare 4 al famoso critico enogastronomico Bergamelli, 3 al noto critico Brescianelli, 2 all'autorevole critico Cremonelli, e una al sempre competente Villani. In quanti modi puó scegliere di ripartire le ricette?

Chiaramente, in $\frac{10!}{4!\,3!\,2!\,1!} = 1400$ modi diversi.

Esercizio 1. Rivedere l'esempio 24 usando la formula per le ripartizioni ordinate.

Permutazioni con ripetizione.

Consideriamo i seguenti problemi:

i): Pierino ha 7 biglie: 3 rosse, 2 bianche e 2 verdi. Le biglie rosse sono identiche tra di loro e lo stesso vale per le verdi e le bianche. Pierino si diletta a disporre le sue biglie in fila. In quanti modi diversi puó disporre in fila le sue biglie?

ii): quante parole di 7 lettere si possono comporre usando 3 volte la a, 2 volte la b e 2 volte la c?

iii): quanti diversi segnali di lunghezza 7 si possono comporre al telegrafo?

i) e ii) sono, ovviamente, lo stesso problema da un punto di vista matematico. Possiamo pensare di comporre una parola assegnando una posizione tra 1 e 7 a ciascuna lettera. Analogamente, possiamo disporre le biglie di Pierino assegnando una posizione tra 1 e 7 a ciascuna biglia.

Consideriamo il problema ii). Una parola di 7 lettere contenente tre a, due b e due c é determinata dalla scelta del sottoinsieme di cardinalitá 3 di $\{1, \ldots, 7\}$ corrispondente alle posizioni nelle quali mettere la a, il sottoinsieme di cardinalitá 2 di $\{1, \ldots, 7\}$ corrispondente alle posizioni nelle quali mettere la b e il sottoinsieme di cardinalitá 2 di $\{1, \ldots, 7\}$ corrispondente alle posizioni nelle quali mettere la c. Quindi le parole di 7 lettere contenente tre a, due b e due c sono (per essere zelanti: sono in corrispondenza biunivoca con) le partizioni ordinate dell'insieme $\{1, \ldots, 7\}$ in un sottoinsieme di cardinalitá 3, uno di cardinalitá 2 e uno di cardinalitá 2. Pertanto sono in numero di

$$\left|\mathcal{P}_{(3,2,2)}(\{1, \ldots, 7\})\right| = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210.$$

Ovviamente, lo stesso vale per il problema i).

Per il problema iii), si osservi che un messaggio al telegrafo é determinato da una sequenza di punti e linee. Quindi un segnale di lunghezza 7 contiene k punti e $7 - k$ linee, con $1 \leq k \leq 7$. Un segnale di lunghezza 7 contenente k punti é equivalente alla partizione ordinata di $\{1, \ldots, 7\}$ in un insieme di cardinalitá k corrispondente alle posizioni nelle quali mettere i punti e uno di cardinalitá $7 - k$ corrispondente alle posizioni nelle quali mettere le linee. Quindi i segnali che contengono k punti per un dato $1 \leq k \leq 7$ sono in numero di $\frac{7!}{k!\,(7-k)!}$. Il numero totale di segnali cercato é pertanto $\sum_{k=0}^{7} \frac{7!}{k!\,(7-k)!}$.

Esempio 29. Quante cifre di 8 lettere si possono scrivere usando tre volte il numero 2, due volte il numero 5, due volte il numero 8 e 1 volta il numero 4?

Si tratta di contare le permutazioni con ripetizione di tre 2, due 5, due 8 e un 4: si hanno

$$\frac{8!}{3!\,2!\,2!\,1!} = 1680.$$

Assimilare il procedimento é la cosa che conta. Per chi vuole una presentazione piú formale, formuliamo il seguente:

Problema 3. Sia dato un insieme di r elementi $\Omega = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Siano dati interi nonnegativi $n_1, \ldots, n_r \geq 0$ e poniamo $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$. Chiediamoci: quanti sono gli elementi di Ω^n (cioé le n-uple ordinate di elementi di Ω) nei quali a_1 compare n_1 volte, a_2 compare n_2 volte, ..., a_r compare n_r volte? Diremo ogni r-upla ordinata siffatta una **permutazione di Ω con n_1 ripetizioni di a_1, ..., n_r ripetizioni di a_r**, o piú brevemente una permutazione con ripetizioni degli elementi di Ω di tipo $(n_1, \ldots, n_r)$.

Per risolvere il problema, osserviamo che una permutazione con ripetizioni degli elementi di Ω di tipo $(n_1, \ldots, n_r)$ si determina scegliendo il sottoinsieme di cardinalitá n_1 di $\{1, \ldots, n\}$ dato dalle posizioni in corrispondenza delle quali mettere a_1, il sottoinsieme di cardinalitá n_2 di $\{1, \ldots, n\}$ dato dalle posizioni in corrispondenza delle quali mettere a_2, ..., il sottoinsieme di cardinalitá n_r di $\{1, \ldots, n\}$ dato dalle posizioni in corrispondenza delle quali mettere a_r. Quindi, le permutazioni con ripetizioni degli elementi di Ω di tipo $(n_1, \ldots, n_r)$ sono in corrispondenza biunivoca con le partizioni ordinate di $\{1, \ldots, n\}$ in un sottoinsieme di cardinalitá n_1, uno di cardinalitá n_2, ..., uno di cardinalitá n_r. Pertanto, le permutazioni con ripetizioni degli elementi di Ω di tipo $(n_1, \ldots, n_r)$ sono in numero di

$$\left|\mathcal{P}_{(n_1,\ldots,n_r)}(\{1, \ldots, n\})\right| = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}.$$

Riepilogo. Vale forse la pena di inserire qui un riepilogo di quanto visto sinora, per chiarire le idee e consolidare i nuovi concetti.

Dato un insieme finito Ω di cardinalitá n, abbiamo introdotto i seguenti altri insiemi:

i): il **prodotto Cartesiano**

$$\Omega^k = \Omega \times \cdots \times \Omega \qquad (k \text{ volte}).$$

Qui $k \geq 1$ é un intero positivo qualsiasi. Gli elementi di Ω^k sono le **sequenze ordinate** $(a_1, \ldots, a_k)$ con $a_i \in \Omega$. La cardinalitá di Ω^k é

$$\left|\Omega^k\right| = n^k.$$

Osservazione 2. Gli elementi di Ω^k descrivono i modi in cui si possono disporre in modo ordinato k elementi non necessariamente distinti di Ω; per questa ragione gli elementi di Ω^k si dicono talvolta disposizioni a k a k con eventuali ripetizioni degli elementi di Ω. Noi parleremo in genere piú semplicemente di sequenze (ordinate) di lunghezza k, o piú brevemente di **k-uple ordinate**.

Per esempio, supponiamo di estrarre una dopo l'altra r carte da un mazzo di 52 carte, *reinserendo a ogni passo la carta estratta.* Allora le possibili estrazioni sono le 52^r r-uple ordinate nel prodotto Cartesiano M^r, ove M é l'insieme delle carte del mazzo.

Come altro esempio, chiediamoci quante sono le parole di lunghezza 5 che si possono formare con le 21 lettere del nostro alfabeto. Ogni parola di lunghezza 5 é una cinquina ordinata di lettere del nostro alfabeto. Chiaramente l'insieme di tali parole si puó quindi identificare con il prodotto Cartesiano A^5, ove A é l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano; quindi abbiamo 21^5 possibili parole. Equivalentemente, possiamo scegliere la prima lettera in 21 modi, la seconda in altri 21 modi, *eccetera*, con un numero totale di $21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 = 21^5$ possibilitá.

Esempio 30. Se $\Omega = \{a, b\}$,

$$\Omega^2 = \big\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\big\},$$

$$\Omega^3 = \big\{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b),(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\big\}.$$

Se $T = \{a, b, c\}$,

$$T^2 = \big\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\big\}.$$

Esercizio 2. Elencare tutti gli elementi di T^3 con $T = \{a, b, c\}$.

ii): se $1 \leq k \leq n$, il sottoinsieme $\Omega^{(k)} \subseteq \Omega^k$, che consiste delle **$k$-uple ordinate di elementi distinti**:

$$\Omega^{(k)} = \{(a_1, \ldots, a_k) \in \Omega^k : a_i \neq a_j \text{ se } i \neq j \ \}.$$

La cardinalitá di $\Omega^{(k)}$ é

$$\big|\Omega^{(k)}\big| = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Per esempio, se $a \in \Omega$ allora $(a, a) \in \Omega^2$ ma $(a, a) \notin \Omega^{(2)}$; se $a, b \in \Omega$, $a \neq b$ allora $(a, b) \in \Omega^{(2)}$. Invece $(a, b, a) \in \Omega^3$ mentre $(a, b, a) \notin \Omega^{(3)}$.

Chiameremo alternativamente gli elementi di $\Omega^{(k)}$ **sottoinsiemi ordinati** di cardinalitá k di Ω.

Osservazione 3. Gli elementi di $\Omega^{(k)}$ descrivono i modi in cui si possono disporre in modo ordinato k elementi distinti di Ω. Per questa ragione, talvolta gli elementi di $\Omega^{(k)}$ si dicono disposizioni (senza ripetizioni) a k a k degli elementi di Ω. Tenderemo peró a non usare questa terminologia e a parlare piú spesso di sottoinsiemi ordinati di cardinalitá k di Ω, o di k-uple ordinate di elementi distinti.

Ad esempio, estraiamo una dopo l'altra $r \leq 52$ carte da un mazzo senza reinserire le carte via via estratte. Le possibili estrazioni ordinate sono allora le r-uple ordinate di elementi distinti di M (equivalentemente, i sottoinsiemi ordinati di cardinalitá r di M), cioé gli elementi di $M^{(r)}$.

Come altro esempio, chiediamoci quante parole di 5 lettere tutte distinte si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto italiano. Tali parole corrispondono agli elementi di $A^{(5)}$ e quindi sono in numero di $21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = \frac{21!}{16!}$. Equivalentemente, possiamo scegliere la prima lettera in 21 modi, la seconda in 20, ..., la quinta in 17 modi.

Nel caso particolare $k = n$ abbiamo

$$\big|\Omega^{(n)}\big| = n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

Gli elementi di $\Omega^{(n)}$ sono i possibili modi di ordinare gli elementi di Ω (e si dicono talvolta permutazioni di Ω).

Per esempio, se estraiamo tutte e 52 le carte dal mazzo senza reinserire via via le carte estratte, le possibili estrazioni ordinate sono i $(52)!$ elementi di $M^{(52)}$.

Esempio 31. Se $\Omega = \{a, b\}$,

$$\Omega^{(2)} = \big\{(a, b), (b, a)\big\},$$

che ha cardinalitá $2 = 2 \cdot 1$. Se $T = \{a, b, c\}$,

$$T^{(2)} = \big\{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\big\},$$

che ha cardinalitá $6 = 3 \cdot 2$; inoltre

$$T^{(3)} = \big\{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)\big\},$$

che ha cardinalitá $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

iii): se $1 \le k \le n$, $\mathcal{P}_k(\Omega)$ é l'insieme dei **sottoinsiemi** (quindi non ordinati) di cardinalitá k di Ω. Dicendo semplicemente *sottoinsieme* si intende **sempre non ordinato**. Un elemento di $\mathcal{P}_k(\Omega)$ si denota $\{a_1, \ldots, a_k\}$, ove gli a_i sono k elementi distinti di Ω.

Osservazione 4. La scrittura $(a_1, \ldots, a_k)$ presuppone che gli a_i (distinti o meno) sono presi nell'ordine scritto: in altri termini, $(a_1, \ldots, a_k)$ **é sempre una k-upla ordinata**. D'altra parte, la scrittura $\{a_1, \ldots, a_k\}$ **denota *l'insieme* degli** a_i, pertanto **senza ordinamento**. Quindi, se $a, b \in \Omega$ e $a \neq b$ allora $(a, b) \neq (b, a) \in \Omega^{(2)} \subseteq \Omega^2$ (l'ordinamento é diverso) mentre $\{a, b\} = \{b, a\} \in \mathcal{P}_2(\Omega)$.

La cardinalitá di $\mathcal{P}_k(\Omega)$ é

$$|\mathcal{P}_k(\Omega)| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Ad esempio, se $A \subseteq M$ é l'insieme degli assi nelle carte del mazzo, allora $A \in \mathcal{P}_4(\Omega)$; se $F \subseteq M$ é l'insieme delle figure e $C \subseteq M$ é l'insieme delle carte di cuori, allora $F \in \mathcal{P}_{12}(M)$, $C \in \mathcal{P}_{13}(M)$, $F \cap C \in \mathcal{P}_3(M)$, $C \cup F = \mathcal{P}_{22}(M)$, $A \cap C \in \mathcal{P}_1(M)$, $A \cup C \in \mathcal{P}_{16}(M)$.

Esempio 32. Se $\Omega = \{a, b\}$,

$$\mathcal{P}_1(\Omega) = \big\{\{a\}, \{b\}\big\},$$

che ha cardinalitá $\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!\,1!} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 2$. Inoltre,

$$\mathcal{P}_2(\Omega) = \big\{\{a, b\}\big\},$$

che ha cardinalitá $\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!\,0!} = 1$ (si ricordi che $0! = 1$). Se $T = \{a, b, c\}$,

$$\mathcal{P}_1(T) = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\big\},$$

che ha cardinalitá $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$. Inoltre,

$$\mathcal{P}_2(T) = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\big\},$$

che ha cardinalitá $\binom{3}{2} = \frac{3!}{1!\,1!} = 3$, mentre

$$\mathcal{P}_3(T) = \big\{\{a, b, c\}\big\},$$

che ha cardinalitá $\binom{3}{3} = 1$.

Osservazione 5. Si notino le uguaglianze, valide per coppie di interi $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}$$

$$1 = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{0!\,n!} = \binom{n}{n} = \binom{n}{0},$$

$$n = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1},$$

Osservazione 6. Talvolta nella letteratura gli elementi di $\mathcal{P}_k(\Omega)$ sono detti combinazioni a k a k degli elementi di Ω; noi tenderemo qui a evitare tale terminologia e a parlare semplicemente di sottoinsiemi di cardinalitá k.

iii): Sia Ω un insieme di cardinalitá n. Se $n_1, \ldots, n_r$ sono numeri interi positivi tali che $n = n_1 + \cdots + n_r = \sum_{i=1}^{r} n_i$, abbiamo denotato con $\mathcal{P}_{(n_1,\ldots,n_r)}(\Omega)$ l'insieme di tutte le r-uple ordinate $(A_1, \ldots, A_r)$, ove

$$A_1, \ldots, A_r \subseteq \Omega$$

sono sottoinsiemi disgiunti di cardinalitá $n_1, \ldots, n_r$ rispettivamente. Data una r-upla siffatta$(A_1, \ldots, A_r)$, si ha allora che Ω é l'unione disgiunta degli A_i; diremo che gli A_i, nell'ordine, sono una **partizione ordinata di Ω.**

Ad esempio, sia M l'insieme delle carte di un mazzo di 52 carte e siano $C, F, P, Q \in \mathcal{P}_{13}(M)$ i sottoinsiemi delle carte del segno dei cuori, dei fiori, delle picche e dei quadri, rispettivamente. Allora

$$(C, F, P, Q),\ (C, P, Q, F),\ (C, Q, P, F),\ (F, C, P, Q),\ (P, F, C, Q)\ \textit{eccetera}$$

sono tutti elementi distinti di $\mathcal{P}_{(13,13,13,13)}(M)$ (differiscono nell'ordine). Ovviamente, sono ben lungi dall'esaurire tutti gli elementi di $\mathcal{P}_{(13,13,13,13)}(M)$!

Gli elementi di $\mathcal{P}_{(n_1,\ldots,n_r)}(\Omega)$ descrivono i modi in cui si puó ripartire Ω nell'unione (necessariamente disgiunta) di un sottoinsieme di cardinalitá n_1, uno di cardinalitá n_2, *eccetera*, tenendo conto dell'ordine dei sottoinsiemi. La cardinalitá di $\mathcal{P}_{(n_1,\ldots,n_r)}(\Omega)$ é

$$\left|\mathcal{P}_{(n_1,\ldots,n_r)}(\Omega)\right| = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}.$$

Esempio 33. Una mamma troppo arrendevole ha comperato 6 giocattoli per i suoi 3 gemellini. Di questi Gigino é il piú capriccioso, Pierino é mezzanello, Luigino é il piú buono. Per avere un pó di tregua la mamma decide di dare 3 giochi a Gigino, 2 a Pierino e 1 a Luigino. In quanti modi puó fare la sua scelta?

Dobbiamo contare le partizioni ordinate di un insieme di 6 oggetti in un sottoinsieme di 3, uno di 2 e uno di 1. In altri termini dobbiamo valutare $\left|\mathcal{P}_{(3,2,1)}(G)\right|$, ove G é l'insieme dei 6 giochi. La risposta é $\frac{6!}{3!\,2!\cdot 1!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{2} = 60$.

Esempio 34. Donna Giovanna ha 10 spasimanti, molto devoti. Oggi vuole sceglierne 4 perché le rassettino la casa, 3 perché sistemino il giardino e 3 perché l'accompagnino in spiaggia. In quanti modi puó fare la sua scelta, supponendo che voglia assegnare un compito a ogni spasimante?

Dobbiamo contare le partizioni ordinate di un insieme di 10 oggetti in un sottoinsieme di 4, uno di 3 e uno di 3. In altri termini dobbiamo valutare $\left|\mathcal{P}_{(4,3,3)}(S)\right|$, ove S é l'insieme dei 10 spasimanti di Donna Giovanna. La risposta é $\frac{10!}{4!\,3!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = 4200$ (si noti che $10! = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!$).

Esempio 35. Quattro partiti hanno vinto in coalizione delle elezioni municipali e intendono ripartirsi la giunta comunale con i suoi 11 assessorati. Tenuto conto dei rispettivi pesi elettorali, convengono che 4 assessorati andranno al partito A, 3 al partito B e 2 ciascuno ai partiti C e D. Quante scelte possono fare?

Dobbiamo contare le partizioni ordinate di un insieme di 11 oggetti in un sottoinsieme di 4, uno di 3, uno di 2 e un altro di 2. In altri termini dobbiamo valutare $\left|\mathcal{P}_{(4,3,2,2)}(A)\right|$, ove A é l'insieme degli 11 assessorati. La risposta é $\frac{11!}{4!\,3!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6\cdot 2\cdot 2} = 69300$ (si noti che $11! = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!$).