SOLUZIONI

1) (B)
2) (E). Luigi non può essere né un Furfante né un Cavaliere dunque non è un abitante di Isos . E' il noto paradosso del Mentitore
3) (B). Infatti deve accadere che $(x+1)^2+1=x^2$
4) (C). Infatti $S_h=2^h-1$ e quindi si ha $2^h-1=-1+4(k-1)$ cioè $2^h=4(k-1)$.
5) (D). Per ottenere la probabilità che la partita finisca con la vittoria di Salvatore per 3 a 2 basta moltiplicare la probabilità di raggiungere il punteggio di 2 a 2 per $\frac{1}{2}$. Comunque almeno 3 partite dovranno essere disputate. Alla fine di queste 3 partite si avranno le seguenti 8 situazioni (tutte equiprobabili): (S,S,S), (S,S,A)…(A,A,A), dove la terna (S,S,S) significa che Salvatore ha vinto la prima, la seconda e la terza e così le altre. Queste rappresentano le disposizioni di due oggetti presi a tre alla volte e quindi $2^3=8$. Tra questi 2 non sono favorevoli infatti non lo sono solo le terne (S,S,S) e (A,A,A) che porterebbero a terminare la partita. Dalle altre 6: (S,S,A), (S,A,S), (A,S,S), (A,A,S), (A,S,A), (S,A,A) si arriverebbe al punteggio di 2 a 2 o 3 a 1 con la stessa probabilità. Quindi la probabilità che vinca Salvatore col punteggio di 3 a 2 è: $\frac{6}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$
6) (A). Siano $A_1=\{x\in\Re : x^4+x^2+x-1>0\}$, $A_2=\{x\in\Re : x-1>0\}$ e $A_3=\{x\in\Re : x^2-4<0\}$, si ha $A=A_1\cap A_2\cap A_3$ e $B=A_2\cap A_3$, quindi $A\subseteq B$, facciamo vedere che vale anche il viceversa, infatti sia $x\in B\Rightarrow x\in A_2$ e $x\in A_3$. Poiché $x\in A_2$ cioè $x-1>0\Rightarrow x^4+x^2+x-1>0$ quindi $x\in A_1$. Ne segue che $A\subseteq B$ e quindi $A=B$. Notiamo, infine, che $A\neq Ø$ infatti $\frac{3}{2}\in A$.
7) (C). La relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva. La relazione non è di ordine totale (per esempio 36 e 45 non sono confrontabili); infine l'insieme quoziente è formato da un numero infinito di elementi.
8) (C). Per n pari $a_n=1$, se n è dispari allora se è uguale a $3,7,11,....$ cioè è uno dei termini della successione aritmetica di primo termine 3 e ragione 4 allora $a_n=2$, se n è uguale a 1,5,9,… allora $a_n=0$.
9) (C). I punti uniti sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} x=2x+y-1 \\ y=x+2y-1 \end{cases}$. Le soluzioni sono infinite e sono tutti e soli i punti della retta di equazione $x+y-1=0$. Infine la trasformazione non rappresenta un' isometria poiché il determinante della matrice associata è $3\neq 1$
10) (B). Basta applicare la proprietà dei logaritmi $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$
11) (C). Il numero di rette è uguale alla somma dei lati e delle diagonali di un poligono di n lati, quindi il numero cercato è $n+\frac{n(n-3)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

12) (B). Infatti sia $h_1 = \overline{VO'}$ e $h_2 = \overline{VO}$, V il volume della piramide,

V_1 il volume della piramide di altezza h_1,

V_2 il volume del tronco di piramide di altezza $h_2 - h_1$ e

V_3 quello di altezza $h - h_2$,

per il teorema sulle sezioni parallele di una piramide si ha:

$$V_1 = \frac{h_1^3}{h^3}V, \quad V_2 = \frac{h_2^3}{h^3}V - \frac{h_1^3}{h^3}V \quad \text{e} \quad V_3 = V - \frac{h_2^3}{h^3}V.$$

Inoltre dovendo essere $V_1 = V_2 = V_3$ ne segue che $h_1 = \frac{h}{\sqrt[3]{3}}$, $h_2 = \frac{h\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

13)(D). Se non si vuole usare il teorema di Bayes si può ragionare direttamente nel modo seguente:

gli ammalati sono 1000, tra questi quelli positivi al test

sono $\frac{19}{20}$ quindi 950. Quelli sani sono 999000,

tra questi quelli positivi al test sono $\frac{2}{999}$ cioè 2000.

Quindi quelli positivi al test, in totale, sono 950+2000=2950,

tra questi quelli ammalati sono 950, pertanto la probabilità cercata è

$\frac{950}{2950} = \frac{19}{59}$ circa 32%.

14) (A). L'area massima è quella del cerchio, quindi il raggio è $R = \frac{l}{2\pi}$.

15) (C). Basta notare che le potenze di 9 danno come ultima cifra 1,

se l'esponente è pari, 9 se è dispari.

16) (A). Basta notare che le soluzioni dell'equazione sono 1 e $t-1$

17) (E). Infatti essi sono: Con una cifra solo 3,

con due cifre (sono 9): 33, 12, 21, 24, 42,15, 51,45,54,

con tre cifre tutte uguali (sono 5): 111,222, 333,444, 555,

con tre cifre di cui 2 uguali

(sono 12): 114,141,411,225,252,522,441,144,414,552,525,255,

e infine tutti quelli di tre cifre tutte distinte (sono 24):

essi si ottengono dalle permutazioni di 1,2,3,

di 2,3,4 di 1,3,5 e di 3,4,5, quindi sono 4(3!)=24.

Quindi in totale: 1+9+5+12+24=51

18) (E). La somma dei primi n numeri naturali è $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Quindi la somma cercata è

data da $\frac{3500(3501)}{2} - \frac{1500(1501)}{2} + 1500 =$

$$\frac{2000(3501) + 1500(3501) - 1500(1501)}{2} + 1500$$

$$\frac{2000(2000) + 2000(1501) + 1500(2000)}{2} + 1500$$

cioè 5002500

19) (B). Basta ricordare che dato un insieme X e indicato con $|X|$ la sua cardinalità si ha: $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ e che se $|X| = n$ allora $|P(X)| = 2^n$

20) (C). L'equazione $ax + by + c = 0$, con $MCD(a,b,c) = 1$, ha soluzioni intere se e solo se $MCD(a,b) = 1$

21) (D). Infatti dovrà essere $3 \cdot 5^2 + 5 \cdot a + 1 = 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 1$.

22) (B). Infatti in un'equazione reciproca le soluzioni sono reciproche.

23) (E).Paradosso dei compleanni. Calcoliamo la probabilità dell'evento contrario:

$q = \frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{341}{365}$, ne segue che la probabilità richiesta è $p = 1 - q > 50\%$.

24) (D). Infatti $a = 10x + y$ e $b = 10y + x$, quindi $a^2 - b^2 = 9 \cdot 11(x - y)(x + y)$

25) (A). Infatti posto s il numero degli spigoli, f il numero delle facce e v il numero dei vertici, e tenuto conto che ogni vertice è comune a tre facce e ogni spigolo a due facce, dalla formula di Eulero:

$f + v = s + 2$, si ha $(p + h) + \frac{5p + 6h}{3} = \frac{5p + 6h}{2} + 2$

26) (D). Infatti il numero 27000000000=$27 \cdot 10^{10} = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^{10}$,
mentre il numero n scritto nel sistema decimale è $n = 10a1$.
Quindi affinché questi numeri siano primi tra loro dovrà essere n non divisibile per 3. Ne segue che $1 + a + 0 + 1$ non dovrà essere divisibile per 3, cioè $a = 0,2,3,5,6,8,9$.

27) (A). Dal teorema di Fermat: Sia p primo allora per ogni $n \in \mathrm{N}$ $n^p - n$ è divisibile per p.
Inoltre $2^9 - 2$ non è divisibile per 9 e $2^{10} - 10$ non è divisibile per 10

28) (B). Infatti $p \to q$ è falsa solo nel caso in cui p è vera e q è falsa

29) (D). Infatti $h = dtg\alpha$, quando si indietreggia di 200 metri si ha $h = (d + 200)\cot g\alpha$ e quindi

$d = \frac{200}{tg^2\alpha - 1}$ ne segue $h = \frac{200tg\alpha}{tg^2\alpha - 1}$

30) (B). Infatti dette x, y e z le dimensioni del parallelepipedo e V il volume si ha

$$V = xyz = \sqrt{(xy)(yz)(xz)} = \sqrt{(2^4 \cdot 5)(2^5 \cdot 3)(2^3 \cdot 3 \cdot 5)}$$

Problema1 risultato $(5,12,13)$, $(6,8,10)$

Un esempio di soluzione: Si tratta di determinare le terne (x, y, z) tali che:

$$(1)\ \frac{xy}{2} = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

equivalente al sistema: (2) $\begin{cases} xy > 2x + 2y & (a) \\ xy - 4x - 4y + 8 = 0 & (b) \end{cases}$

Tenuto conto che non può essere $x = y$, possiamo supporre $x < y$
(trovata una terna di questo tipo scambiando x con y ne otteniamo un'altra).
Poniamo $y = x + n$ con $n \in \mathrm{N}$, sostituendo nella (b) del sistema (2)
si ha l'equazione (3) $x^2 + (n-8)x - 4n + 8 = 0$, da cui
$\Delta = n^2 + 32$. Condizione necessaria affinché x sia intero è che $n^2 + 32 = m^2$.
Da ciò otteniamo $m^2 - n^2 = 32$, cioè $(m-n)(m+n) = 32$.
Le uniche soluzioni possibili sono:

(a) $\begin{cases} m - n = 1 \\ m + n = 32 \end{cases}$ che non fornisce alcuna soluzione.

(b) $\begin{cases} m - n = 2 \\ m + n = 16 \end{cases}$ che fornisce la soluzione $n = 7, m = 9$ da cui si ottiene $(5,12,13)$

(c) $\begin{cases} m - n = 4 \\ m + n = 8 \end{cases}$ che fornisce la soluzione $n = 2, m = 6$ da cui si ottiene $(6,8,10)$.

Non ci sono altre soluzioni, salvo le altre due simmetriche).

Problema2

Un esempio di soluzione: supponiamo per assurdo che la funzione k sia periodica di periodo T (diverso da 0). Ne segue che $k(x+T) = k(x)$ cioè
$sen(x+T) + sen(\sqrt{2}x + \sqrt{2}T) = senx + sen\sqrt{2}x$, ne segue che

$sen(x+T)-senx=-\left[sen(\sqrt{2}x+\sqrt{2}T)-sen\sqrt{2}x\right]$ e quindi

$\cos(x+\frac{T}{2})sen\frac{T}{2}=-\cos(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}T}{2})sen\frac{\sqrt{2}T}{2}$

E questo deve valere per ogni $x\in\Re$. Sostituendo al posto di x, $x-\frac{T}{2}$ otteniamo $\cos x sen\frac{T}{2}=-\cos\sqrt{2}x sen\frac{\sqrt{2}T}{2}$. Ne segue che poiché $\cos\frac{\pi}{2}sen\frac{T}{2}=-\cos\sqrt{2}\frac{\pi}{2}sen\frac{\sqrt{2}T}{2}$ allora $-\cos\sqrt{2}\frac{\pi}{2}sen\frac{\sqrt{2}T}{2}=0$ quindi $sen\frac{\sqrt{2}T}{2}=0$ cioè $\sqrt{2}T$ è multiplo di 2π. Infine, poiché $\cos\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sen\frac{T}{2}=-\cos\sqrt{2}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sen\frac{\sqrt{2}T}{2}$ e $-\cos\sqrt{2}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sen\frac{\sqrt{2}T}{2}=\cos\frac{\pi}{2}sen\frac{\sqrt{2}T}{2}=0$, ne segue che $\cos\frac{\pi}{2\sqrt{2}}sen\frac{T}{2}=0$ cioè $sen\frac{T}{2}=0$ e quindi $\frac{T}{2}$ è multiplo di 2π ma ciò è assurdo poiché se $\sqrt{2}T$ e $\frac{T}{2}$ sono multipli di 2π allora $\sqrt{2}T=2n\pi$ e $\frac{T}{2}=2m\pi$ con $n,m\in\mathrm{N}$ e da ciò ne seguirebbe che $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$

Problema3

Un esempio di soluzione: 1 caso. La retta AB è perpendicolare ad r. Poiché il segmento di perpendicolare è minore di ogni segmento obliquo segue la tesi.

2 caso. Sia N un punto di r distinto da P, si ha allora (poiché in un triangolo la somma di 2 lati è maggiore del terzo ed essendo C il simmetrico di A rispetto a r, AN=CN e AP=CP) che AN+NB=CN+NB>CB e quindi AP+PB=CP+PB=CB.

La Soluzione del quesito n.17 è (E) e non (B), come erroneamente riportato prima.