

Liceo Garofano Capua

CONCORSO PREMIO

m m m m m

MERAVIGLIOSAMENTE MATEMATICA MICHELE MENDITTO

CAPUA 10 Maggio 2010

La prova è costituita da 30 quesiti a risposta multipla e da 3 problemi.

Nei quesiti a risposta multipla una sola risposta è quella corretta. Ad ogni risposta corretta saranno attribuiti 4 punti, ad ogni risposta sbagliata 0 punti e ad ogni risposta non data 1 punto.

Alle risoluzioni dei problemi sarà attribuito un punteggio p con $0 \leq p \leq 40$.

Tempo massimo: 4 ore.

Non è consentito l'uso della calcolatrice.

Per le prime tre ore non sarà consentito ad alcun partecipante di allontanarsi dall'aula se non per gravi motivi.

Tabelle per le risposte ai quesiti:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| | | | | | | | | | | | | | | |

Quesiti: risposte corrette X4 =

Risposte non date X 1 =

Punteggio totale quesiti =

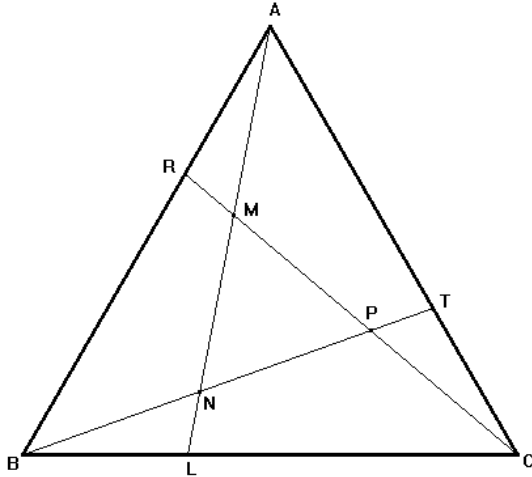
Problemi: $P_1=$ $P_2=$ $P_3=$

Punteggio totale prova P =

Problemi:

1) Tratto da: Mariano Mataix "In cerca della soluzione" RBA Italia.

Un triangolo equilatero di vertici ABC viene diviso in sette parti dai segmenti AL, BT e CR, tutti e tre di uguale lunghezza. Il triangolo AMR (e gli altri due ad esso congruenti) ha area uguale a 8 m^2 , mentre il quadrilatero BNMR (e gli altri due ad esso congruenti) ha area uguale a 22 m^2 . Calcolare l'area del triangolo MNP.



2) Salvatore incontra, dopo alcuni anni, il suo compagno di liceo, Andrea, molto bravo nel risolvere problemi. Volendo mettere alla prova questa sua capacità gli propone il seguente problema:

Qual è quel numero di 4 cifre tale che le prime due sono uguali, sono uguali anche le ultime due e il numero è un quadrato?

3) Sull'Isola Chenoncè vive una tribù detta dei Cavalieri (essi dicono sempre la verità), un'altra detta dei Furfanti (essi dicono sempre il falso) e due altri abitanti, che vivono nella stessa capanna, uno è detto l'Astrologo e l'altro lo Stregone (non sappiamo se sono entrambi Cavalieri, Furfanti oppure uno è un Cavaliere e l'altro un Furfante). Un esploratore si reca nella capanna allo scopo di conoscere lo stregone. Trova due persone uno col cappello rosso, l'altro col cappello giallo. L'esploratore chiede: lo Stregone è un Cavaliere? Risponde l'uomo col cappello rosso e dalla risposta che dà (sì o no), l'esploratore scopre che lo Stregone è l'uomo col cappello giallo. Perché?

QUESITI

1) Qual è l'insieme S delle soluzioni della disequazione $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x}{x-4}} < 2$?

- A) $S =]4; +\infty[$ B) $S = \emptyset$ C) $S = \{0\}$ D) $S = \{0,4\}$

2) Per quali valori di $a, b \in \mathfrak{R}$ si verifica la disuguaglianza $a^8 + b^8 \geq a^3 b^5$?

- A) $\forall a, b \in \mathfrak{R}$ B) Solo se $a > b$ C) Solo se $a < 0$ e $b < 0$
D) nessuna delle precedenti

3) Una macchina produce bulloni. Si sa che se uno è difettoso allora la probabilità che lo sia anche il successivo è $1/20$; mentre se è perfetto la probabilità che il successivo sia difettoso è $1/50$. Sapendo che il primo è perfetto qual è la probabilità che il terzo sia difettoso?

- A) $103/5000$ B) $49/2500$ C) $1/1000$ D) Nessuna delle precedenti

4) Quanti sono gli anagrammi che si possono realizzare con la parola CONCORSO?

- A) 3360 B) 80640 C) 40320 D) Nessuna delle precedenti

5) *“Qual è l'geometra che tutto s'affigge
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,”*

Dante in Paradiso XXXIII vv. 133-136

A quale questione allude Dante?

- A) La quadratura del cerchio B) Il V postulato di Euclide C) Le Geometrie non euclidee
D) I numeri irrazionali

6) Considera la seguente affermazione: “se un poligono convesso di un numero pari di lati è inscritto in una circonferenza la somma degli angoli di posto pari è uguale alla somma degli angoli di posto dispari” essa è:

- A) Sempre falsa
B) Sempre vera
C) Vera solo se il poligono è regolare
D) Vera solo se uno dei lati è uguale al raggio

7) Siano r e q due numeri interi positivi con $r > q$. Sia definita l'operazione $\&$ tale che

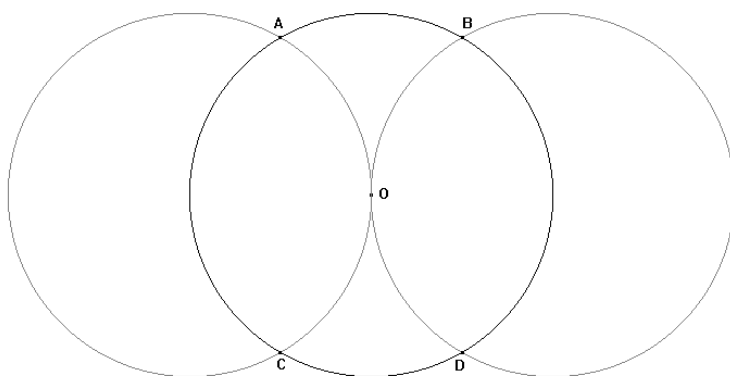
$$r \& q = \frac{2^{2r+q}}{2^{r-q}} \quad \text{Per quanti valori di } r \text{ risulta } r \& 1 = 4?$$

- A) nessun valore B) un valore C) infiniti valori D) nessuna delle precedenti

8) Se x, y e z sono numeri interi positivi con $xy = 24$, $xz = 48$ e $yz = 72$, quanto vale $x + y + z$?

- A) 18 B) 20 C) 22 D) 24

9) Due circonferenze uguali e tangenti esternamente in O sono segate da una terza circonferenza ad esse uguale e di centro O, nei punti A,B,C,D. Qual è l'area complessiva dei triangoli curvilinei OAB e OCD?



- A) $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)r^2$ B) $\left(\sqrt{6} + \frac{\pi}{6}\right)r^2$
 C) $3\left(\pi + \sqrt{2}\right)r^2$ D) $\left(\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right)r^2$

10) Considerato uno qualsiasi dei cinque poliedri regolari, il poliedro avente per vertici i centri delle facce del poliedro dato è ancora un poliedro che si dice duale di quello originario.

I duali del tetraedro, del cubo e dell' ottaedro sono rispettivamente:

- A) l'ottaedro, il cubo e il tetraedro
 B) il tetraedro, il cubo e l'ottaedro
 C) il prisma, la piramide, il parallelepipedo rettangolo
 D) il tetraedro, l'ottaedro e il cubo

11) Date le parabole di equazione $y = x^2 + 2x + 3$ e $y = 3x^2 + 4x - 10$ quali sono le equazioni delle tangenti comuni?

- A) Non ci sono tangenti comuni
 B) $y = -2x + 3$ $y = 4x - 18$
 C) $y = -x + 15$ $y = 6x - 5$
 D) $y = -8x - 22$ $y = 10x - 13$

12) Sia k la lunghezza dello spigolo di un cubo. Qual è la superficie del solido i cui vertici sono i punti medi degli spigoli del cubo?

- A) $5\sqrt{3} k^2$
- B) $\sqrt{3}(1+\sqrt{3})k^2$
- C) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})k^2$
- D) $3k^2$

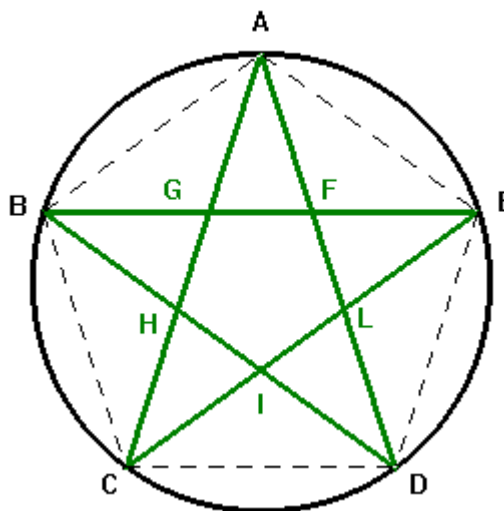
13) Dati i punti $A(-2,0)$ e $B(2,0)$ e la retta $r: x + y - 3 = 0$, l'equazione del luogo geometrico descritto dal baricentro del triangolo APB al variare di P su r è:

- A) $x + y - 1 = 0$ B) $x + y - 2 = 0$ C) $x + y = 0$ D) $x + y - 4 = 0$

14) Il pentagono stellato (o pentagramma o pentalfa) è la figura che fu scelta dai Pitagorici come simbolo della loro scuola. A questa stella che simboleggia salute, energia, luce, legame furono attribuiti anche vari significati magici e religiosi.

Il pentagono stellato è una figura intrecciata che ha come lati le diagonali di un pentagono regolare. Facendo riferimento alla figura, se il segmento AF misura s , quanto misura il segmento GF ?

- A) $\sqrt{5+2\sqrt{5}} s$
- B) $(\sqrt{2}-1) s$
- C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} s$
- D) $\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\right) s$



15) Nel modello di geometria non euclidea di tipo iperbolica la somma degli angoli interni di un triangolo è

- A) maggiore di un angolo piatto
- B) minore di un angolo piatto
- C) uguale a un angolo piatto
- D) nessuna delle precedenti

16) Supponiamo che 3 turisti arrivino, ciascuno per proprio conto, in una località in cui ci sono 5 alberghi. Se ogni turista sceglie a caso in quale albergo alloggiare qual è la probabilità che alloggino in alberghi diversi?

- A. $\frac{3}{5}$
- B. $\frac{1}{20}$
- C. $\frac{9}{25}$
- D. $\frac{12}{25}$

17) In un triangolo rettangolo la bisettrice dell'angolo retto ha per misura b e l'area è uguale a $4b^2$.

Quanto misurano i cateti?

A. $2b(2\sqrt{2} \pm \sqrt{6})$

B. $b\sqrt{2}(2 \pm \sqrt{3})$

C. $b(2 \pm \sqrt{3})$

D. $3b(6 \pm \sqrt{6})$

18) Consideriamo l'equazione: $2x^3 + (k+1)x^2 + hx - 20 = 0$

Sapendo che le soluzioni sono k, h e 2 determinare il valore di $kh + 2$

A) 5

B) 3

C) 7

D) Nessuna delle precedenti

19) Stabilire quale delle seguenti trasformazioni è un'affinità

A) $\begin{cases} x' = x \\ y' = x + 1 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y + 2 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x' = 2x + y^2 + 4 \\ y' = -x^2 + 3y \end{cases}$

20) Quanti sono i valori di k intero positivo, tali che $k^2 + 9k$ è un quadrato?

A) Per infiniti valori

B) Per nessun valore

C) Per 2 valori

D) Sono false tutte le precedenti

21) Per quale valore di $n \in \mathbb{N}$ la quantità $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\dots\dots\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ è uguale a 1000?

A) Per nessun valore

B) Per $n=1999$

C) Per $n>2000$

D) Sono false tutte le precedenti

22) Sapendo che a e b sono reali e tali che $a^2 + b^2 > a^3 + b^3$ si deduce che:

A) $a > 1$ oppure $b > 1$

B) $a < 0$ oppure $b < 0$

C) se $a > 1$ allora $b < 1$

D) se $a > 0$ allora $b < 0$

23) In una scatola ci sono 20 palline, 10 rosse e 10 nere. Estraendo a caso 10 palline quale tra queste situazioni è più probabile?

- A) Sono tutte nere
- B) 6 nere e 4 rosse
- C) 5 nere e 5 rosse
- D) Hanno tutte la stessa probabilità

24) Quanti sono i divisori di $n = 2^7 5^8 7^2$?

- A) 17
- B) 20
- C) 216
- D) 532

25) Per quanti valori del numero naturale n la quantità $\frac{4n+3}{n+2}$ è un numero naturale?

- A) Per nessun valore
- B) Per infiniti valori
- C) Per un solo valore
- D) Sono false tutte le precedenti

26) L'equazione $\log_x 4 + \log_4 x = -2$

- A) Non ha soluzioni
- B) ha infinite soluzioni
- C) ha una sola soluzione
- D) ha due soluzioni

27) Qual è il periodo della funzione: $f(x) = \sin 4x \cos 8x$?

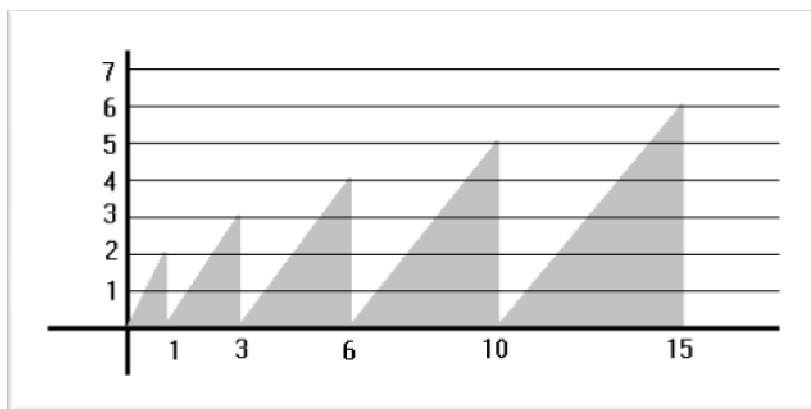
- A) $\frac{\pi}{2}$
- B) 2π
- C) π
- D) nessuno dei precedenti

28) Sull'Isola Chenoncè vive una tribù detta dei Cavalieri (essi dicono sempre la verità), un'altra detta dei Furfanti (essi dicono sempre il falso). Un esploratore incontra tre abitanti dell'isola e chiede loro: "Chi di voi tre è un Cavaliere?". Il primo risponde: Solo io. Il secondo: Solo io. Il terzo: Al massimo solo uno tra noi è un Cavaliere. Da ciò ne segue che:

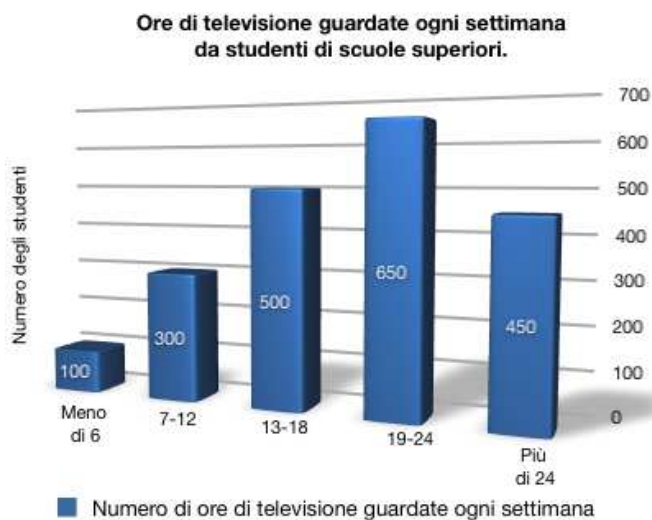
- A) Il primo e il secondo sono Cavalieri, il terzo è un furfante
- B) Sono tre Furfanti
- C) Il terzo è l'unico Cavaliere
- D) Non è possibile stabilire chi sono i Cavalieri e chi i Furfanti.

29) Nella sequenza di triangoli disegnati sotto se A_n rappresenta l'area dell'ennesimo triangolo per quale valore di n risulterà $A_n = 105$?

- A) 12 B) 13 C) 14 D) 15



30) Facendo riferimento al grafico che segue qual è la percentuale di studenti delle scuole superiori che guarda minimo 19 ore di televisione ogni settimana?



- A) 33% B) 45% C) 55% D) nessuna delle precedenti