LiceoGarofanoCapua

CONCORSO PREMIO

MERAVIGLIOSAMENTEMATEMATICAMICHELEMENDITTO

CAPUA, 29 APRILE 2009

La prova è costituita da 30 quesiti a risposta multipla e da 3 problemi.
Nei quesiti a risposta multipla una sola risposta è quella corretta. Ad ogni risposta corretta saranno attribuiti 4 punti, ad ogni risposta sbagliata 0 punti e ad ogni risposta non data 1 punto.
Alle risoluzioni dei problemi sarà attribuito un punteggio p con $0 \le p \le 40$.

Tempo massimo: 4 ore.
Non è consentito l'uso della calcolatrice.
Per le prime tre ore non sarà consentito ad alcun partecipante di allontanarsi dall'aula se non per gravi motivi.

Tabelle per le risposte ai quesiti:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Quesiti: risposte corrette………..X4=

Risposte non date……….X1=

Punteggio totale quesiti=

Problemi: P_1= P_2= P_3=

Punteggio totale prova P=

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1) Siano x e y due numeri interi. Dalla seguente affermazione: x e y sono *alleati* se la differenza $x-y$ è un numero *onesto* si deduce che
A) se $x-y$ non è un numero *onesto* allora x e y non sono *alleati;*
B) se $x-y$ è un numero *onesto* allora x e y sono *alleati;*
C) i numeri *alleati* sono infiniti;
D) zero è un numero *onesto;*
E) ogni numero è *alleato* con se stesso

2) Gli abitanti dell'isola Isos si dividono in due categorie: i Cavalieri che dicono sempre la verità e i Furfanti che non dicono mai la verità. Sapendo che Luigi ha fatto la seguente affermazione: *Io sono un Furfante.* Ne segue che:
A) Luigi è un Cavaliere;
B) Luigi è un Furfante;
C) Luigi è sia un Cavaliere che un Furfante;
D) L'isola non può esistere;
E) Luigi non è un abitante di Isos

3) Siano $y=f(x)$ e $y=g(x)$ due funzioni definite in $\Re$, con $f(x)=x+1$ e $g(x)=x^2$. Detto $X=\{x\in\Re:(f\circ g\circ f)(x)=g(x)\}$, si ha :
A) $X=\{1\}$ B) $X=\{-1\}$ C) $X=\{0\}$ D) $X=\{-1;0;1\}$ E) $X=\varnothing$

4) Sia $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{257}$ la progressione aritmetica di primo termine -1 e ragione 4 e $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_{10}$ la progressione geometrica di primo termine 1 e ragione 2.
Sia S_h la somma dei primi h termini della progressione geometrica, l'uguaglianza $S_h=a_k$ è:
A) Impossibile B) vera solo se h e k sono pari
C) per ogni $h\in\{2,\ldots,10\}$ esiste uno ed un sol $k\in\{2,\ldots\ldots,257\}$ tale che l'uguaglianza sia vera
D) per ogni $k\in\{2,\ldots\ldots,257\}$ esiste uno ed un sol $h\in\{2,\ldots,10\}$ tale che l'uguaglianza sia vera
E) l'uguaglianza è vera per ogni coppia $(h;k)$ con $h\in\{2,\ldots,10\}$ e $k\in\{2,\ldots\ldots,257\}$

5) Due amici, Salvatore e Andrea, giocano lanciando un dado (non truccato). Salvatore scommette sull'uscita di un numero pari, Andrea su quello dispari. Ad ogni lancio viene attribuito un punto a chi indovina, zero all'altro. Vince (e quindi il gioco termina) quando uno dei due realizza tre punti. Qual è la probabilità che vinca Salvatore col punteggio di 3 a 2?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{3}{16}$ E) sono errate tutte le precedenti

6) Considerati i due sistemi:

$$\begin{cases} x^4 + x^2 + x - 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

e detti, rispettivamente, A e B gli insiemi di soluzioni del primo e del secondo, si ha:

A) $A = B$ B) $A \subset B$ C) $B \subset A$ D) $A = \varnothing$ E) $B = \varnothing$

7) Nell'insieme $\mathbb{N}$ consideriamo la seguente relazione:
xRy se e solo se x e y hanno lo stesso numero di cifre.

A) R è antisimmetrica B) R è una relazione di ordine totale

C) R è una relazione di equivalenza D) R è riflessiva ma non Simmetrica E) l'insieme quoziente $\mathbb{N}/R$ ha un numero finito di elementi.

8) Consideriamo la successione di termine generale

$$a_n = (-1)^n (\cos n\pi + sen\frac{n\pi}{2}):$$

A) la successione è costante B) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ $0 \le a_n < 1$

C) la successione assume infinite volte il valore 2

D) l'estremo inferiore è $-\infty$ E) l'estremo superiore è $+\infty$

9)Data la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x + 2y - 1 \end{cases}$$

A)essa rappresenta un' isometria B) l'unico punto unito è (0; 1)

C) ha infiniti punti uniti D) non ha rette unite E) sono errate tutte le precedenti

10)Il risultato della seguente espressione:

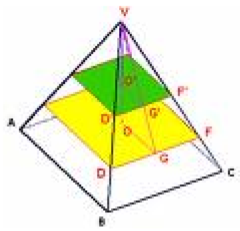
$$\frac{(\log_2 3)(\log_2 3^2)....(\log_2 3^{10})}{(\log_2 3)^{10}}$$ è:

A) 9! B) 10! C) 10^{10} D) $10\log_2 3$ E) 9^{10}

11)Dati nel piano n punti, con $n > 3$, tre a tre non allineati, quante sono le rette che li congiungono due a due?

A) n^2 B) $\frac{n(n+1)}{2}$ C) $\frac{n(n-1)}{2}$ D) $n(n-1)$ E) $n(n+1)$

12)A quali distanze dal vertice si debbono condurre due piani paralleli alla base di una piramide di altezza *h* affinché essa resti divisa in tre parti equivalenti?



A) $\frac{h}{2}, \frac{h}{3}$ B) $\frac{h}{\sqrt[3]{3}}, \frac{h\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$ C) $h\sqrt{2}, h\sqrt{3}$ *D)* $h\sqrt[3]{2}, \frac{h\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$

E) $\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{3}}$

13)In una popolazione di 1000000 di individui i soggetti colpiti da una certa malattia sono $\frac{1}{1000}$. Esiste un test che dà indicazioni sulla malattia e precisamente: tra gli ammalati risultano positivi al test $\frac{19}{20}$, mentre tra gli individui sani risultano positivi al test $\frac{2}{999}$. Qual è la probabilità che un individuo che risulti positivo al test sia effettivamente ammalato?

A) tra il 50% e il 70% B) più del 90% C) tra il 20% e il 30% D) tra il 30% e il 40%

E) meno del 20%

14)Disponendo di un filo di lunghezza l qual è la massima area che si potrà delimitare?

A) $\frac{l^2}{4\pi}$ B) $\frac{l^2}{\pi}$ C) $\frac{l^2}{4}$ D) πl^2 E) $\frac{l^2}{16\pi}$

15) La cifra delle unità del numero : $(2009)^{29} + (29)^{2009}$ è

A) 1 B) 2 C) 8 D) 0 E) Nessuna delle precedenti

16) Data l'equazione di secondo grado a coefficienti interi $x^2 + tx + t - 1 = 0$, essa avrà solo soluzioni intere:

A) per qualsiasi valori di t B) solo se t è pari C) solo se t è pari e maggiore di 6
D) solo se t è dispari E) Sono errate tutte le precedenti

17) Con i numeri 1,2,3,4 e 5 quanti numeri, al massimo di tre cifre e tutti divisibile per 3, si possono formare ?

A) 26 B) 27 C) 28 D) meno di 20 E) più di 30

18) Quanto vale la somma dei numeri compresi tra 1500 e 3500, estremi inclusi?

A) compresa tra 8000000 e 9000000 B) 5001000 C) meno di 5000000

D) più di 9000000 E) 5002500

19) Se la cardinalità dell'insieme X è 10, quella dell'insieme Y è 15 e quella dell'insieme $X \cap Y$ è 7, allora la cardinalità dell'insieme $P(X \cup Y)$ (insieme delle parti dell'insieme X unito Y) è:

A) 18 B) 2^{18} c) 18^2 D) 36 E) compresa tra 70 e 100

20) Data la retta di equazione $4x + 2y + 1 = 0$ i punti della retta aventi coordinate intere sono:

A) uno B) due C) nessuno D) infiniti ma nessuno appartenente al terzo quadrante E) infiniti ma non tutti appartenenti al terzo quadrante

21) Sapendo che $(3a1)_5 = (10201)_3$ ne segue che:

A) $a = 4$ B) $a = 3$ C) $a = 0$ D) l'uguaglianza è impossibile E) $a = 2$

22) Un'equazione reciproca di quarto grado ha, tra le sue soluzioni, i numeri $2\sqrt{3}$ e $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, allora le altre sue soluzioni sono:

A) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ e $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ B) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ e $-(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $-(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ E) Non è possibile stabilirlo

23) In una classe di 25 studenti detta p la probabilità che almeno due di essi siano nati nello stesso giorno dell'anno (non necessariamente nello stesso anno), si ha:

A) $p < 25\%$ B) $30\% < p < 40\%$ C) $41\% < p < 50\%$ D) $p = 50\%$ E) $p > 50\%$

24) Sia *a* un numero di 2 cifre e *b* il numero che si ottiene scambiando tra loro le cifre delle unità e delle decine. Si ha che:

A) $a^2 - b^2$ è pari B) $a^2 - b^2$ è divisibile per 11 e per 7 C) $a^2 - b^2$ è divisibile per 9 e per 7 D) $a^2 - b^2$ è divisibile per 11 e per 9

E) sono errate tutte le precedenti

25)Un poliedro è costituto da p pentagoni e da h esagoni, allora, per la formula di Eulero, si ha:

A) $p = 12$ B) $p < 12$ C) $p > 12$ D) $h = 6$ E) $h = 12$

26) Determinare a, con $0 \le a \le 9$, tale $n = 1 \cdot 10^3 + a \cdot 10 + 1$ sia primo con 270000000000.

A) $a \ne 4$ B) solo se $a = 0,2,5$ C) solo se $a = 0,2,5,8$

D) solo se $a = 0,2,3,5,6,8,9$ E) $a \ne 7$

27) Sia n un qualsiasi numero naturale. Quante di queste cinque affermazioni sono vere?

$n^3 - n$ è divisibile per 3;

$n^5 - n$ è divisibile per 5;

$n^9 - n$ è divisibile per 9;

$n^{10} - n$ è divisibile per 10;

$n^{13} - n$ è divisibile per 13.

A) tre B) tutte C) nessuna D) quattro E) due

28) Rossella dice alla sua sorellina Valentina: *Se impari la poesia la mamma ti farà uscire.*

Valentina le risponde: *Quello che hai detto non è vero.*

Supponendo che Valentina abbia detto la verità si deduce che:

A)Valentina non ha imparato la poesia ma la mamma l'ha fatta uscire

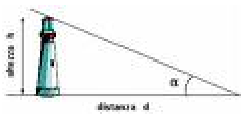
B)Valentina ha imparato la poesia ma la mamma non l'ha fatta uscire

C)Valentina non ha imparato la poesia e la mamma non l'ha fatta uscire

D)Valentina ha imparato la poesia e la mamma l'ha fatta uscire

E)Sono errate tutte le precedenti

29) Un faro è visto dal limite di un fossato che lo circonda sotto un angolo α. Indietreggiando di 200 metri esso è visto sotto l'angolo complementare di α. Sapendo che $tg\alpha = \sqrt{5}$, qual è l'altezza del faro?



A) $\sqrt{5}$ B) $100\sqrt{5}$ C) $150\sqrt{5}$ D) $50\sqrt{5}$ E) $25\sqrt{5}$

30) Le facce di un parallelepipedo rettangolo misurano 80, 96 e 120 cm^2.

Il suo volume è, in centimetri cubi,

A) 360 B) 960 C) 9600 D) 1200 E) 3600

PROBLEMI

Problema1: Determinare i triangoli rettangoli, con i lati interi, tali che il perimetro coincida con l'area.

Problema 2: Date le funzioni $f(x) = senx$ e $g(x) = sen\sqrt{2}x$, dimostrare che la funzione $k(x) = f(x) + g(x)$ non è periodica (o ciò che è lo stesso, è periodica di periodo T=0)

Problema 3: Data la retta r e i punti A e B non appartenenti ad r e situati nello stesso semipiano di origine r e sia P un punto di r e dette d_1 e d_2 rispettivamente le distanze di A da P e di B da P, dimostrare che $d_1 + d_2$ è minima se P è il punto comune alla retta r e alla retta passante per B e C essendo C il simmetrico di A rispetto ad r.