Liceo Garofano Capua

CONCORSO mMmMm PREMIO

MERAVIGLIOSAMENTEMATEMATICAMICHELEMENDITTO

CAPUA 16 Aprile 2012

La prova è costituita da 30 quesiti a risposta multipla e da 3 problemi.
Nei quesiti a risposta multipla una sola risposta è quella corretta. Ad ogni risposta corretta saranno attribuiti 4 punti, ad ogni risposta sbagliata 0 punti e ad ogni risposta non data 1 punto.
Alle risoluzioni dei problemi sarà attribuito un punteggio p con $0 \leq p \leq 40$.

Tempo massimo: 4 ore.
Non è consentito l'uso della calcolatrice.
Per le prime tre ore non sarà consentito ad alcun partecipante di allontanarsi dall'aula se non per gravi motivi.

Tabelle per le risposte ai quesiti:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Quesiti: Risposte corrette ……….. x4 =

Risposte non date ………. x 1 =

Punteggio totale quesiti =

Problemi: P_1 = …………

P_2 = …………

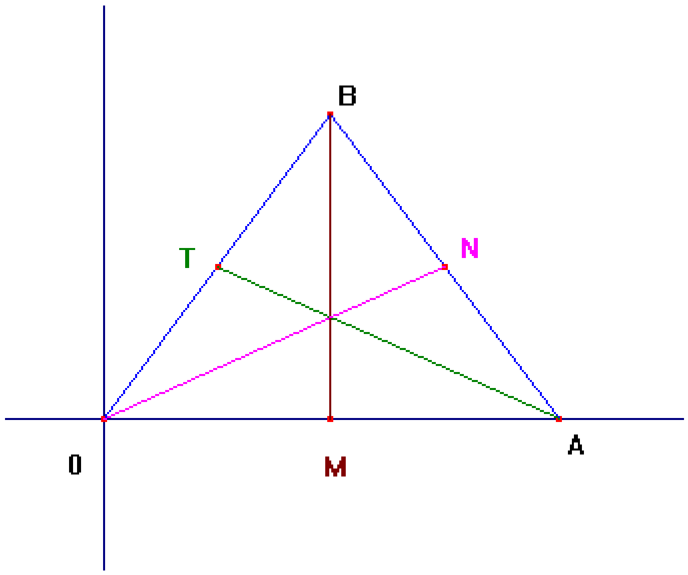
P_3 = ………….

Punteggio totale prova: P =

Problema 1

In un triangolo la somma dei quadrati dei suoi lati è 344 metri quadrati, una mediana misura 8 metri e il prodotto delle altre due è 97 metri quadrati. Determinare la misura dei lati.

Soluzione: 10, 10 e 12 metri. Infatti:



Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy e il triangolo di vertici $O(0;0)$, $A(2a;0)$ e $B(2b;2c)$, con a, b e c positivi. Siano inoltre $M(a;0)$, $N(a+b;c)$ e $T(b;c)$ i punti medi dei lati, dai dati si ha:

$$\begin{cases} (a-2b)^2+4c^2=64 \\ \left[(2a-b)^2+c^2\right]\left[(a+b)^2+c^2\right]=9409 \\ 4a^2+4b^2+4c^2+(2a-2b)^2+4c^2=344 \end{cases}$$

Da cui
$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2+4c^2=64 \\ \left[4a^2-4ab+b^2+c^2\right]\left[a^2+2ab+b^2+c^2\right]=9409 \\ 4a^2+4b^2+4c^2+4a^2-8ab+4b^2+4c^2=344 \end{cases}$$

dall'ultima delle tre equazioni si ottiene $a^2+b^2+c^2-ab=43$ cioè $b^2+c^2-ab=43-a^2$ e tenuto conto della prima equazione si ha: $a^2+4(43-a^2)=64$ da cui si ottiene $a=6$ e sostituito nelle prime due equazioni del sistema si ottiene:

$$\begin{cases} (6-2b)^2+4c^2=64 \\ \left[(12-b)^2+c^2\right]\left[(6+b)^2+c^2\right]=9409 \end{cases}$$ da cui

$$\begin{cases} b^2+c^2=7+6b \\ \left[144-24b+b^2+c^2\right]\left[36+12b+b^2+c^2\right]=9409 \end{cases}$$

e sostituendo $b^2+c^2=7+6b$ nella seconda equazione si ottiene $b=3$ e quindi $c=4$. Ne segue che $A(12;0)$ e $B(6;8)$ e quindi i lati misurano 10, 10 e 12 metri

Problema 2

Dividendo il polinomio $P(x)$ per il binomio $x-a$ si ottiene come resto *a*; dividendolo per $x-b$ si ottiene come resto *b*. Trovare il resto che si ottiene se lo si divide per $x^2-(a+b)x+ab$

Soluzione: Se $a \neq b$ il resto è x. Infatti $x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$. Dividendo il polinomio $P(x)$ per $(x-a)(x-b)$ si ottiene, tenuto conto che il grado del resto è minore del grado di $x^2-(a+b)x+ab$, un polinomio al più di primo grado, dunque $R(x)=\alpha x+\beta$. Inoltre $P(x)=Q(x)(x-a)(x-b)+\alpha x+\beta$ e tenuto conto che $P(a)=a$ e $P(b)=b$ si ha $\begin{cases}\alpha a+\beta=a\\ \alpha b+\beta=b\end{cases}$ e quindi $\alpha=1$ e $\beta=0$. Se $a=b$ si hanno infinite soluzioni e precisamente se $a\neq 0$ allora $R(x)=\dfrac{a-\beta}{\beta}x+\beta$ mentre se $a=0$ allora $R(x)=\alpha x$

Problema 3

I numeri 46 e 96 hanno una curiosa proprietà e precisamente il loro prodotto non cambia se scambiamo le cifre infatti 46x96=4416=64x69. Determinare tutte le coppie di due cifre che posseggono la stessa proprietà. (Trascurando le coppie con le cifre uguali per es. 22 e 33, e quelli con le cifre scambiate, per es. 23 e 32)

Soluzione: **s**ono 28 coppie, infatti scritti i numeri nella forma
$10x+y$ e $10z+t$
dovrà accadere che
$(10x+y)(10z+t)=(10y+x)(10t+z)$
da cui si ricava che
$xz=yt$.
Tenendo presente che essi sono numeri interi minori di 10 si potranno avere solo i seguenti prodotti:
4=1x4=2x2 e quindi otteniamo le coppie (12;42), (21,24),
6=1x6=2x3 che ci dà le coppie (12,63), (36,21), (13,62), (31,26), 8=2x4=1x8 che ci dà le coppie (12,84), (21,48), (14,82), (41,28), 9=1x9=3x3 che ci dà le coppie (13,93), (31,39)
12=3x4=6x2 che ci dà le coppie (36,42), (63,24), (23,64), (32,46)
16=2x8=4x4 che ci dà le coppie (24,84), (42,48)
18=9x2=3x6 che ci dà le coppie (93,26), (39,62), (23,96), (32,69),
24=3x8=6x4 che ci dà le coppie (36,84), (63,48), (43,68), (34,86),
36=4x9=6x6 che ci dà le coppie (96,46), (69,64)

QUESITI

1) Un rettangolo ha perimetro P metri e area A metri quadrati. Quale delle seguenti relazioni devono soddisfare i valori di P e A?

A) $P^3 > A$ B) $A^2 > 2P+1$ C) $P^2 \geq 16A$ D) $P \cdot A \geq A+P$

Soluzione C

Se i lati del rettangolo sono a e b sappiamo che 2a+2b = P e a b = A e si può scrivere

$x^2 - \frac{P}{2}x + A = 0$. Poiché x è reale il discriminante è non negativo e quindi $\frac{P^2}{4} - 4A \geq 0$

quindi $P^2 \geq 16A$

2) Nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$ l'equazione $\cos^8 x + \sin^6 x = 1$ ammette

A) 3 soluzioni B) 4 soluzioni C) 6 soluzioni D) 8 soluzioni

Soluzione B

$$\cos^8 x + \sin^6 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^8 x + (1-\cos^2 x)^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^8 x - \cos^6 x + 3\cos^4 x - 3\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x(\cos^6 x - \cos^4 x + 3\cos^2 x - 3) = 0 \qquad \Leftrightarrow \cos^2 x(\cos^2 x - 1)(\cos^4 x + 3) = 0$$

da cui $\cos x = 0; \cos x = 1; \cos x = -1$ e $x = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

3) Se $\log_a x = 3$ e $\log_b x = 4$ allora $\log_{ab} x =$

A) 12 B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{12}{7}$ D) $\frac{8}{7}$

Soluzione C

$$\log_a x = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\log x}{\log a} = 3 \quad \Rightarrow \quad \log a = \frac{\log x}{3}$$

$$\log_b x = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\log x}{\log b} = 4 \quad \Rightarrow \quad \log b = \frac{\log x}{4}$$

$$\log_{ab} x = \frac{\log x}{\log ab} = \frac{\log x}{\log a + \log b} = \frac{\log x}{\frac{\log x}{3} + \frac{\log x}{4}} = \frac{12}{7}$$

4) Qual è il luogo geometrico dei punti del piano tali che sia 1 la somma dei quadrati delle loro distanze dalle rette di equazione *3x+4y-1 =0* e *4x-3y+2=0* ?

A) Una retta B) Una circonferenza C) Una parabola D) Un'iperbole

Soluzione B

Indicate con (x, y) le coordinate del punto generico del luogo geometrico si ha:

$$\frac{(3x+4y-1)^2}{25}+\frac{(4x-3y+2)^2}{25}=1$$

Eseguendo i calcoli si ha l'equazione $5(x^2+y^2)+2x-4y-4=0$ che rappresenta una circonferenza.

5) Nel triangolo ABC se l'angolo in A è 45°, a = 7 e b =10 quanti triangoli distinti si possono formare?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

Soluzione A

Per il teorema dei seni

$$\frac{7}{\sin 45°}=\frac{10}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta=\frac{10\sin 45°}{7}\cong 1.01>1$$

$$\sin\beta\neq 1.01$$

6) Quanti numeri di 4 cifre distinte si possono formare con {8,7,6,5,0} escludendo quelli che iniziano con lo zero?

A) 24 B) 96 C) 120 D) 144

Soluzione B

Si considerano le disposizioni, senza ripetizioni poiché le cifre devono essere distinte, $D_{5,4}$ e a queste bisogna sottrarre quelle relative ai numeri che iniziano con lo zero, che sono $D_{4,3}$. Quindi

$$D_{5,4}-D_{4,3}=\frac{5!}{(5-4)!}-\frac{4!}{(4-3)!}=5\cdot 4!-4!=96$$

7) Se $3x-x^2\geq 2$ e $y^2+y\leq 2$ allora:

A) $-1\leq xy\leq 2$ B) $-2\leq xy\leq 2$ C) $-4\leq xy\leq 4$ D) $-4\leq xy\leq 2$

Soluzione D

Risolvendo la prima disequazione si ottiene: $1\leq x\leq 2$

risolvendo la seconda disequazione si ottiene: $-2 \leq y \leq 1$

il più piccolo prodotto possibile xy è -4

il più grande prodotto possibile xy è 2

dunque $\quad -4 \leq xy \leq 2$.

8) Se $\quad f(x)=\dfrac{x}{x-1} \quad$ e $\quad f^2(x)=f(f(x)), f^3(x)=f(f^2(x))............f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$ dove n è un numero intero positivo diverso da 1 Qual è il più piccolo valore di n tale che $f^n(x)=f(x)$?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

<u>Soluzione B</u>

$$f^2(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=f(x)=\frac{x}{x-1}$$

9) Se una famiglia ha tre figli qual è la probabilità che almeno uno sia maschio?

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{8}$

<u>Soluzione A</u>

La probabilità che almeno un figlio sia maschio è 1- la probabilità che siano tutte femmine cioè

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$$

10) Ogni alunno di una classe di 50 studenti studia solo una delle due lingue, il francese o lo spagnolo e solo una delle due discipline, matematica o fisica. Sapendo che solo 16 studenti studiano sia il francese che la matematica, 26 studenti studiano lo spagnolo e 12 studenti fisica, quanti studenti studiano sia spagnolo che fisica?

A) 4 B) 5 C) 6 D) Nessuna delle precedenti

<u>Soluzione A</u>

	Francese	Spagnolo
Fisica	c	a
Matematica	16	b

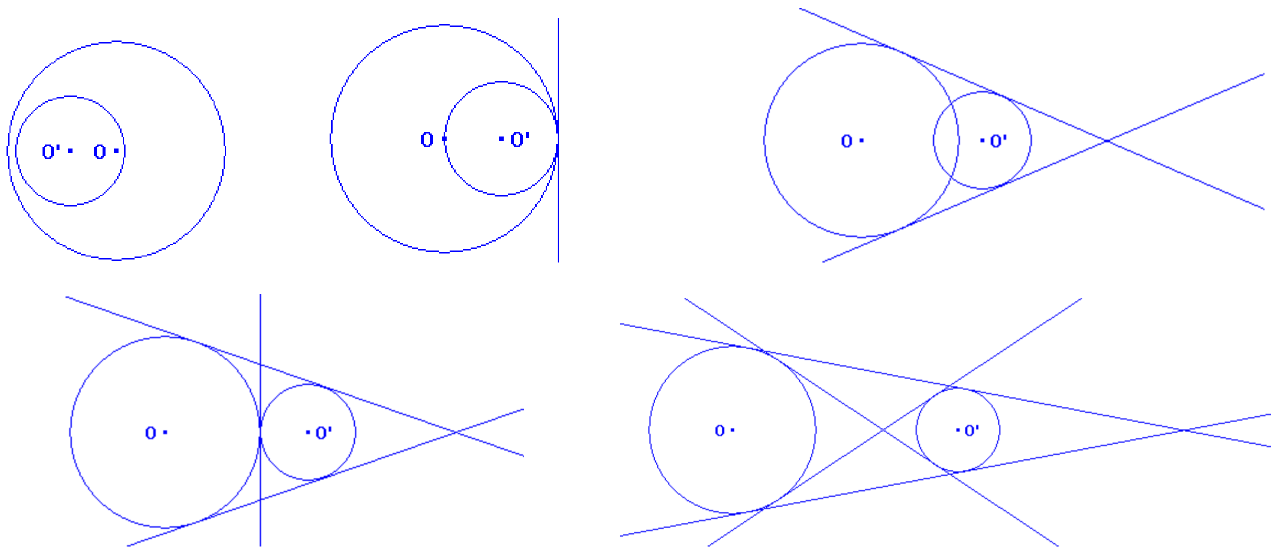
a+b+c+16=50 a+b=26 a+c=12 sottraendo le prime due equazioni si ottiene c = 8 sostituendo nelle altre equazioni si ottiene b = 22 e a = 4.
Gli studenti che studiano spagnolo e fisica sono 4.

11) Quante sono al variare del parametro *k* le tangenti comuni alle due circonferenze di equazione:

$x^2+y^2=4$ e $(x-k)^2+y^2=1$?

A) 0, 2 oppure 4 B) 2 C) 0, 1 oppure 2 D) 0, 1, 2, 3 oppure 4

<u>Soluzione D</u>



12) La somma dei quadrati di tre numeri in progressione aritmetica di ragione 2 è uguale ad un numero di tre cifre tutte dispari e distinte tra loro. Quante sono le terne si fatte?

A) 1 B) infiniti C) tre D) Sono errate tutte le precedenti

<u>Soluzione A</u>

Infatti:posto $f(x)=x^2+(x-2)^2+(x+2)^2$ si ha $f(x)=3x^2+8$ che deve essere maggiore di 134 e minore di 976 da cui *x* compreso tra 7 e 17 e dispari. Ma f(7)=155, f(9)=251, f(11)=371, f(13)=515, f(15)=673, f(17)=875 da cui *x*=11 è l'unica soluzione

13) Ad una gara di ballo partecipano 9 coppie. Ogni partecipante possiede un numero tra 1 e 18. Curiosamente si scopre che la somma dei due numeri dei partner di ogni coppia è un quadrato. Marina, uno dei partecipanti, possiede il numero 1, qual è il numero del suo partner?

A) 8 B) 3 C) 15 D) Non è possibile stabilirlo

Soluzione C

Infatti al numero 1 si possono associare 3, 8 oppure 15. Ma 8 si può associare solo al 17 e quindi restano 3 e 15. Se 1 fosse associato a 3 allora al 6 resterebbe solo 10 e quindi 15 non avrebbe nessun numero associato, ne segue allora che ad 1 è associato 15.

14) Mario ha dimenticato il suo codice Bancomat. Ricorda solo che erano 5 cifre tutte distinte e in ordine crescente e che una di esse era 6. Quanti sono i possibili codici?

A) $C_{9,4}$ B) $D_{9,4}$ C) P_9 D) Sono errate tutte le precedenti.

Soluzione A

Infatti bisogna scegliere le altre 4 cifre tra le 9 rimaste. Per ogni scelta di queste 4 le 5 cifre che si ottengo da queste col 6 si possono disporre in unico modo in maniera crescente. Quindi sono le combinazioni di 9 oggetti presi a 4 alla volta.

15) L'equazione $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = sent \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$ rappresenta:

A) Una circonferenza B) Una parabola C) Un arco di circonferenza D) Un arco di parabola

Soluzione D

Infatti $\cos 2t = 1 - 2sen^2 t$ e quindi si ottiene l'equazione cartesiana $x = 1 - 2y^2$, tenuto conto delle limitazioni della t si ha $-1 \le x \le 1$ e $-1 \le y \le 1$

16) Quale tra queste trasformazioni rappresenta una Similitudine?

A) $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$ B) $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$ C) $\begin{cases} x' = 3x + 3y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ D) $\begin{cases} x' = 3x + 3y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$

Soluzione A

Infatti deve essere $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = -bx+ay \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = bx-ay \end{cases}$

17) L'equazione $px^3+x^2-x+p=0$ con p numero primo,

A) Non ha soluzioni reali

B) Ha una soluzione intera

C) Ha tre soluzioni razionali

D) Sono errate tutte le precedenti.

Soluzione D

Infatti l'equazione è di grado dispari e quindi ha almeno una soluzione reale. Ricordando inoltre che le soluzioni intere sono divisori del termine noto (quindi ± 1, $\pm p$) mentre quelle razionali devono essere costituite da rapporti tra divisori del termine noto e quelli del coefficiente di grado maggiore (quindi $\pm\frac{1}{p}$) ne segue che la risposta corretta è la D.

18) Il rapporto tra i volumi di due cubi è 7, qual è il rapporto tra le loro superfici?

A) $\sqrt[3]{7}$ B) $\sqrt[3]{49}$ C) 7 D) $\sqrt{7}$

Soluzione B

Infatti da $\frac{L^3}{l^3}=7$ ne segue che $\frac{L}{l}=\sqrt[3]{7}$ e quindi $\frac{L^2}{l^2}=\sqrt[3]{49}$

19) Un gruppo di studenti organizza una maratona. Il 30% dei partecipanti è fuori allenamento. Si ipotizza che tra quelli che non sono allenati riescono a terminare la gara il 60%, mentre tra quelli allenati riescono a terminare la gara il 95%. Preso a caso uno dei partecipanti che ha terminato la gara, qual è la probabilità che questi appartenga al gruppo di quelli allenati?

A) $\frac{169}{200}$ B) $\frac{133}{169}$ C) $\frac{133}{200}$ D) Nessuna delle precedenti

Soluzione B

Infatti posto $A=\{\text{studenti allenati}\}$, $nA=\{\text{studenti non allenati}\}$, $M=$

$\{\text{studenti che terminano la gara}\}$, $nM=\{\text{studenti che non terminano la gara}\}$ si ha: $p(nA)=\frac{3}{10}$,

$p(A)$=1-$p(nA)$=$\frac{7}{10}$, $p(M/nA)$=$\frac{3}{5}$ e $p(M/A)$=$\frac{19}{20}$. Ne segue che

$p(M) = p(M/nA)\,p(nA) + p(M/A)\,p(A) = \frac{3}{5} x \frac{3}{10} + \frac{19}{20} x \frac{7}{10} = \frac{169}{200}$ e quindi

$$p(A/M) = \frac{p(M/A)\,p(A)}{p(M)} = \frac{\frac{19}{20} x \frac{7}{10}}{\frac{169}{200}} = \frac{133}{169}$$

20) Qual è l'ultima cifra del numero $4^{2012} + 2012^4$?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 0

Soluzione A

Infatti $4^{2012} = (4^2)^{1006} = 16^{1006}$ la cui ultima cifra è 6, la stessa di 2012^4

21) L'area della regione di piano costituita dai punti $(x; y)$ che verificano la disuguaglianza $|x| + |x + y| \leq 2$ vale:

A) $\frac{32}{3}$ B) 8 C) $\frac{16}{3}$ D) 16

Soluzione B

Infatti la regione individuata dalla disuguaglianza è costituita dal parallelogramma di vertici $(-2;2), (0;2), (2;-2)$ e $(0;-2)$

22) Data l'equazione $x^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}\right)^x$, quale tra queste affermazioni è corretta?

A) l'unica soluzione è $x = \sqrt{3}$ B) $x = 3$ è una soluzione

C) $x = 2\sqrt{3}$ è una soluzione D) $x = 3\sqrt{3}$ è una soluzione

Soluzione D

Infatti $x = \sqrt{3}$ e $x = 3\sqrt{3}$ sono soluzioni, mentre $x = 3$ e $x = 2\sqrt{3}$ non lo sono

23) Alcuni matematici hanno studiato i numeri naturali "speciali" (di cui non conosciamo la definizione) ed hanno dimostrato i teoremi sotto elencati. Uno di essi implica tutti gli altri. Quale?

A) Ci sono infiniti numeri dispari che non sono speciali

B) Ci sono infiniti numeri dispari ed infiniti numeri pari che non sono speciali

C) Per ogni numero speciale c'è un numero naturale non speciale maggiore di esso

D) I numeri speciali hanno al massimo 1000 cifre

Soluzione D

Infatti da D seguono tutti gli altri teoremi.

24) Dati i numeri $x = 10^{(10)^{10}}$ e $y = 2^{(10)^{11}}$ quale tra seguenti affermazioni è corretta?

A) $y^2 < x$ B) $y > x^3$ C) $x < y < x^2$ D) nessuna delle precedenti

Soluzione B

Infatti $x^3 = (10^{(10)^{10}})^3 = 10^{3(10)^{10}} = 1000^{(10)^{10}}$ mentre $y = 2^{(10)^{11}} = 2^{10(10)^{10}} = 1024^{(10)^{10}}$

25) Data l'equazione $ax^5 + (a-1)x^4 + 2ax^3 + x^2 - x - 1 = 0$, per quale valore di a la somma delle soluzioni è 0?

A) 1 B) 0 C) -1 D) per infiniti valori di a

Soluzione A

Infatti data l'equazione $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ si ha, come generalizzazione del caso n=2, che dette $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ le soluzioni allora:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{e} \quad \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

26) Una piramide retta avente per base un quadrato di lato l ha le facce laterali inclinate di $45°$ sul piano di base. Il suo volume è:

A) l^3 B) $\frac{1}{6}l^3$ C) $\frac{1}{2}l^3$ D) $\frac{1}{3}l^3$

Soluzione B

Infatti poiché l'altezza è $\frac{l}{2}$ ne segue che il volume è $\frac{1}{6}l^3$

27) Un poliedro possiede 20 facce e 12 vertici. Allora i suoi spigoli sono:

A) 30 B) 32 C) 34 D) non è possibile stabilirlo

Soluzione A

Infatti dalla formula di Eulero: posto f il numero delle facce, v quello dei vertici e s quello degli spigoli si ha $f+v=s+2$

28) Nel modello di Geometria Ellittica quante sono le rette parallele ad una data retta condotte da un punto non appartenente alla retta?

A) Una B) Due C) Infinite D) Nessuna

Soluzione D

Infatti nella Geometria Ellittica non esistono le rette parallele

29) Se $senx=\frac{1}{3}$ allora $sen3x=$

A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) sono errate tutte le precedenti

Soluzione D

Infatti $sen3x=3senx-4sen^3x$ quindi $sen3x=\frac{23}{27}$

30) Quanto vale $sen(arctg\frac{1}{3})$?

A) l'espressione è priva di significato B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ D) $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

Soluzione C

Infatti $sen(arctg\frac{1}{3})=\frac{tg(arctg\frac{1}{3})}{\sqrt{1+tg^2(arctg(\frac{1}{3}))}}$, da cui $sen(arctg\frac{1}{3})=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}$