Liceo Garofano Capua

CONCORSO mMmMm PREMIO

MERAVIGLIOSAMENTE MATEMATICA MICHELE MENDITTO

CAPUA 4 Aprile 2011

La prova è costituita da 30 quesiti a risposta multipla e da 3 problemi.
Nei quesiti a risposta multipla una sola risposta è quella corretta. Ad ogni risposta corretta saranno attribuiti 4 punti, ad ogni risposta sbagliata 0 punti e ad ogni risposta non data 1 punto.
Alle risoluzioni dei problemi sarà attribuito un punteggio p con $0 \le p \le 40$.
Tempo massimo: 4 ore.
Non è consentito l'uso della calcolatrice, del cellulare, di altri dispositivi elettronici, di tavole numeriche, di testi e di appunti personali.
La Commissione, per i test, terrà conto solo delle risposte riportate nell'apposito schema.
Per le prime tre ore non sarà consentito ad alcun partecipante di allontanarsi dall'aula se non per gravi motivi.

Tabelle per le risposte ai quesiti:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Quesiti: Risposte corrette ……….. x4 =

Risposte non date ………. x 1 =

Punteggio totale quesiti =

Problemi: P_1 = …………

P_2 = …………

P_3 = ………….

Punteggio totale prova: P =

QUESITI (Alcuni di essi sono tratti dalla Letteratura)

1) Scegliendo 2 numeri reali, a caso, nell'intervallo di estremi 0 e 1, qual è la probabilità che la loro somma sia compresa tra $\frac{1}{3}$ e 1?

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{17}{18}$ D) Sono sbagliate tutte le precedenti

Soluzione A

Infatti la probabilità è data dal rapporto tra l'area del trapezio di vertici $A\left(\frac{1}{3};0\right)$, $B\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $C(1;0)$ e $D(0;1)$ e l'area del quadrato di lato 1.

2) Siano A e B due vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza. Scelto sulla circonferenza un punto P a caso, qual è la probabilità che l'angolo APB sia di 120°?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) $\frac{1}{9}$

Soluzione B

Il punto P dovrà appartenere al minore degli archi individuati dai punti A e B e quindi la probabilità è data dal rapporto tra la lunghezza di quest'arco e quella della circonferenza.

3) In una libreria si devono disporre 6 diversi libri di Matematica, 4 diversi libri di Latino e 2 diversi libri di Storia. Tenuto conto che quelli di una stessa disciplina devono stare insieme in quanti modi si potranno disporre?

A) 34560 B) 207360 C) 69120 D) Sono sbagliate tutte le precedenti.

Soluzione B

Infatti i possibili modi si ottengono dal seguente prodotto: $P_3(P_6)(P_4)(P_2) = 3!(6!)(4!)(2!)$

4) Le similitudini nel piano trasformano:

A) figure in figure congruenti B) figure in figure equivalenti
C) circonferenze in circonferenze D) rette in rette parallele

Soluzione C

Basta consultare un qualsiasi testo che tratta le trasformazioni nel piano

5) Dati i numeri 1,2,2,2,3,4,8,9,9 e dette rispettivamente M_1, M_2, M_3 la moda, la media aritmetica e la mediana, si ha:

A) $M_1 < M_2 < M_3$ B) $M_2 < M_3 < M_1$ C) $M_3 < M_1 < M_2$ D) $M_1 < M_3 < M_2$

Soluzione D

Infatti $M_1 = 2$, $M_2 = 40/9$, $M_3 = 3$

6) Se i tre numeri $\log a, \log b, \log c$ formano, nell'ordine, una progressione aritmetica allora:

A) $b = ac$ B) $b = a + c$ C) $b^2 = ac$ D) $b^2 = \frac{a+b}{2}$

<u>Soluzione C</u>

Infatti $\log a - \log b = \log b - \log c$ da cui $\log \frac{a}{b} = \log \frac{b}{c}$ e quindi $b^2 = ac$

7) In una classe di 22 studenti si sa che:

i) almeno uno di essi non ha la sufficienza in matematica

ii) presi comunque due di essi almeno uno ha la sufficienza in matematica

Da ciò si deduce che:

A) 21 studenti hanno la sufficienza in matematica

B) almeno 11 studenti non hanno la sufficienza in matematica

C) non è possibile stabilire quanti hanno la sufficienza in matematica

D) sono errate tutte le precedenti

<u>Soluzione A</u>

Infatti se quelli che hanno la sufficienza in matematica fossero tutti allora la i) sarebbe falsa e se fossero al massimo 20 allora presi due tra i restanti sarebbe falsa la ii)

8) Sulla tomba di Diofanto di Alessandria (matematico del III secolo d.C.) era riportato il seguente epitaffio 'La sua adolescenza terminò dopo un sesto della sua vita; si sposò dopo un altro settimo; si fece crescere la barba dopo un altro dodicesimo e 5 anni più tardi nacque suo figlio; il figlio visse la metà degli anni del padre, che gli sopravvisse per quattro anni'. A quanti anni morì Diofanto?

A) 48; B) 60; C) 72; D) 84;

<u>Soluzione D</u>

Infatti posto x gli anni vissuti da Diofanto, dai dati si ha: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{12}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$

9) In quale base il numero 1310 corrisponde al numero 116 in base 10?

A) 8 B) 9 C) 4 D) 5

<u>Soluzione C</u>

Infatti $1 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 1 \times 4 + 0 \times 4^0 = 116$

10) Nello spazio tridimensionale le rette parallele ad una retta *t* ed aventi distanza 1 da essa sono:

Nello spazio tridimensionale le rette parallele ad una retta *t* ed aventi distanza 1 da essa sono:

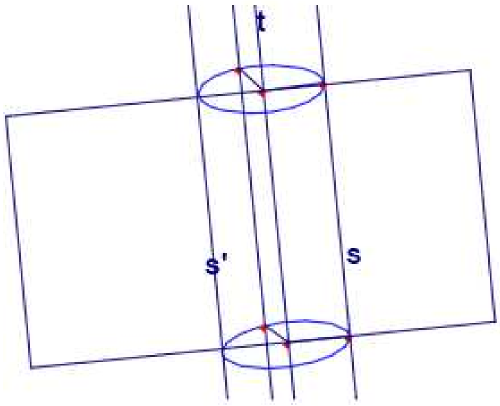
A) tutte e sole le rette appartenenti ad un cilindro

B) tutte e sole le rette appartenenti ad un piano

C) due rette parallele tra loro e parallele a *t*

D) una sola retta

<u>Soluzione A</u>



Infatti nel piano esistono solo due rette s e s' parallele ad una retta t e distante 1 da essa. Ruotando il piano intorno alla retta t le rette s e s' descrivono un cilindro.

11) Data la successione definita per ricorrenza:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} \end{cases} \quad \text{il termine } a_{93} \text{ è uguale a:}$$

A) 10 B) $\dfrac{1}{10^{93}}$ C) $\dfrac{1}{10}$ D) 10^{93}

Soluzione A

Infatti nella successione i termini di indice pari sono tutti uguali a $\dfrac{1}{10}$ e quelli di indice dispari sono uguali a 10.

12) Diabolik sa che la cassaforte della Macomber &C di Clerville ha una combinazione costituita da 6 cifre, di cui due sono uguali a 3, due sono uguali a 7 e due sono uguali a 8, ma non sa quali.
Se la combinazione inserita è giusta la cassaforte si apre, altrimenti suona l'allarme.
Qual è la probabilità che Diabolik riesca ad aprire la cassaforte?

A) $\dfrac{1}{21}$ B) $\dfrac{1}{90}$ C) $\dfrac{3}{28}$ D) $\dfrac{1}{45}$

Soluzione B

Infatti le combinazioni che Diabolik può inserire sono

$$\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{6!}{(2!)^3} = 90$$

(i modi di scegliere 2 posizioni da 6 per le cifre 3, 2 posizioni dalle rimanenti 4 per le cifre 7 e 2 posizioni dalle ultime 2 per le cifre 8) una sola delle quali è giusta, per cui

$$p = \frac{1}{90}$$

13) Se $\quad senx + \cos x = \frac{1}{2}$ allora $tgx + ctgx =$

A) $\frac{13}{3}$ B) $\pm\frac{8}{3}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $-\frac{8}{3}$

Soluzione D

Infatti $\quad tgx + ctgx = \dfrac{1}{senx \cos x}$ inoltre $(senx + \cos x)^2 = 1 + 2senx \cos x = \frac{1}{4}$ da cui il risultato.

14) Se $a(x+2) + b(x-1) = 3$ per ogni $x \in \mathrm{N}$ allora $a =$

A) -1 B) 2 C) 1 D) 3

Soluzione C

Infatti da $a(x+2) + b(x-1) = 3$ si ha $(a+b)x + 2a - b = 3$ e applicando il principio di identità dei polinomi si ha $a = 1$ e $b = -1$

15) Nell'insieme Z dei numeri interi relativi è definita la seguente relazione: x è in relazione con y se e solo se $x \cdot y < 0$.
Quali proprietà, tra le proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva, verifica la relazione?

A) solo le proprietà riflessiva e simmetrica B) solo le proprietà riflessiva e antisimmetrica C) solo la proprietà simmetrica D) solo la proprietà transitiva.

Soluzione C

E' verificata la proprietà simmetrica: se xRy allora yRx. Infatti, dati due numeri interi relativi x e y tali che $x \cdot y < 0$ segue, per la proprietà commutativa della moltiplicazione, che $y \cdot x < 0$.
Non è verificata la proprietà riflessiva; cioè non è vero che: xRx per ogni elemento di Z. Infatti ogni numero appartenente a Z moltiplicato per se stesso dà come risultato un numero non negativo.
Non è verificata la proprietà antisimmetrica; cioè non è vero che : se xRy e yRx allora $x = y$. Infatti, per esempio $-1R3$ e $3R-1$, ma $-1 \neq 3$.
Non è verificata la proprietà transitiva; cioè non è vero che : se xRy e yRz, allora xRz. Consideriamo, infatti, ad esempio, la terna di numeri -2,3,-5.
Si ha $-2R3$ perché $-2 \cdot 3 < 0$
Si ha $3R-5$ perché $3 \cdot (-5) < 0$
Ma non si ha $-2\ R-5$ perché $-2 \cdot (-5) > 0$

16) Consideriamo i numeri in base 21 dove le cifre sono rappresentate dalle 21 lettere dell'alfabeto A-Z, con A=1, B=2,……..,V=20, Z=0. Cosa fa STUDIARE + ALGEBRA?

A) BENEBENE B) ABTRESEQ C) ARRETUIO D) SVHMPDMF

Soluzione D

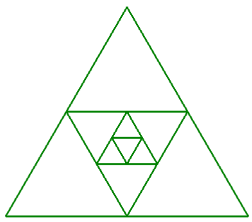
Scritta la corrispondenza fra ogni lettera dell'alfabeto e i numeri interi tra 0 e 20

A=1, B=2, C=3, D=4, E=5, F=6, G=7, H=8, I=9, L=10, M=11, N=12, O=13, P=14, Q=15, R=16, S=17, T=18, U=19, V=20, Z=0

Otteniamo:

Riporti		**1**				**1**			
	17	**18**	**19**	**4**	**9**	**1**	**16**	**5**	**+**
		1	**10**	**7**	**5**	**2**	**16**	**1**	**=**
	17	**20**	**8**	**11**	**14**	**4**	**11**	**6**	
Corrispondenza	**S**	**V**	**H**	**M**	**P**	**D**	**M**	**F**	

17) In un triangolo equilatero, congiungendo i punti medi dei lati si ottiene un altro triangolo equilatero. Ripetendo più volte questa costruzione si ottengono sempre triangoli equilateri.



Consideriamo la successione a_n delle lunghezze dei lati dei successivi triangoli equilateri. Se il primo dei triangoli ha il lato di lunghezza 2 cioè $a_1 = 2$ la successione così definita è una progressione aritmetica o geometrica e quanto vale a_n?

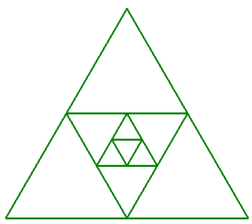
A) Geometrica e $a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

B) Aritmetica e $a_n = 2 + \frac{1}{2n}$

C) Non è né geometrica né aritmetica e $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$

D) Aritmetica e $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

<u>Soluzione A</u>



Le lunghezze dei lati dei triangoli sono rispettivamente 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$ …………..

In altre parole la lunghezza dei lati di un triangolo è la metà della lunghezza dei lati del triangolo precedente. Si ha quindi una progressione geometrica $a_{n+1} = a_n \cdot q$ con $q = \frac{1}{2}$. Essendo $a_1 = 2$ abbiamo $a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

18) Tre studentesse Michela, Giada e Roberta stanno frequentando il corso di chimica. Supponiamo di sapere che Michela partecipa al 30% delle lezioni, Giada al 50% e Roberta all'80%. Supponiamo di sapere che ognuno delle tre decide di partecipare o meno a una lezione indipendentemente dalle altre. Calcolare la probabilità che alla lezione di domani siano presenti tutte e tre.

A) 0.93 B) 0.12 C) 0.24 D) 0.88

<u>Risposta B</u>

Indichiamo con A l'evento "Michela è presente alla lezione di domani", analogamente gli eventi B e C per la presenza di Giada e Roberta. Sappiamo che

P (A) = 0.3 P(B) = 0.5 P(C) = 0.8
Per l'indipendenza tra i tre eventi abbiamo
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.8 = 0.120$

19) Quale tra le seguenti funzioni verifica l'identità $f(2x+1) = 2(f(x))^2$?

A) $\log_2 x$ B) 2^x C) 2^{-x} D) $\frac{x^2-1}{2}$

<u>Soluzione B</u>

Infatti $2^{2x+1} = 2(2^x)^2$, mentre le altre non verificano l'identità.

20) Sull'isola "Chenoncé" vivono due tribù una formata da persone che dicono sempre la verità e sono dette Cavalieri e l'altra che dicono sempre bugie e sono dette Furfanti. Un esploratore incontra 4 abitanti dell'isola: Salvatore, Andrea, Valentina e Rossella. Essi affermano, rispettivamente: Salvatore "Almeno uno di noi è un furfante". Andrea " Tra noi ci sono almeno due Furfanti". Valentina"Tra di noi ci sono almeno tre Furfanti". Rossella" Siamo tutti Furfanti". Ne segue che:

A) Salvatore e Andrea sono Furfanti, Valentina e Rossella Cavalieri

B) Sono tutti Cavalieri C) Sono tutti Furfanti

D) Salvatore e Andrea sono Cavalieri, Valentina e Rossella Furfanti.

<u>Soluzione D</u>

Infatti Salvatore non può essere un Furfante altrimenti direbbe la verità, ne segue che è un Cavaliere e allora Rossella è un Furfante. Analogamente Andrea non può essere un Furfante altrimenti direbbe la verità, quindi è un Cavaliere e allora Valentina è un Furfante.

21) Due amici, Salvatore e Andrea, stanno giocando a carte. Vince chi pesca la carta più alta. Ad ogni mano viene attribuito 1 punto a chi vince e 0 all'altro. Il gioco termina quando il primo di essi totalizza 10 punti. Sul punteggio di 9 a 8 in favore di Salvatore decidono di sospendere il gioco. Se la somma in palio per il vincitore era 170 euro come è "equo" suddividere questa somma?

A) Salvatore 127,5 euro e Andrea 42,5 euro B) 85 euro ciascuno

C) Salvatore 90 euro e Andrea 80 euro D) Salvatore 100 euro e Andrea 70 euro

Soluzione A

Infatti è una versione del "problema delle parti". Posto E_1=*{Salvatore pesca la carta più alta}* e E_2=*{Andrea pesca la carta più alta}*, la speranza di vittoria di Salvatore è legata al verificarsi degli eventi E_1 o E_2E_1 che sono indipendenti quindi la probabilità di vincere di Salvatore è la somma delle probabilità di questi eventi cioè

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

quindi gli spetterebbe

$$\frac{3}{4}\times 170 = 127{,}5$$

22) Per quanti valori del parametro a il polinomio $(x-1)(x^2-a^2)(x^2-a-1)$ è divisibile per il polinomio x^2+x-2 ?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5

Soluzione C

Infatti $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ quindi $(x-1)(x^2-a^2)(x^2-a-1)$ dovrà essere divisibile per $(x+2)$ e ciò accade se è divisibile per $(x+2)$ il fattore (x^2-a^2) e quindi per $a=\pm 2$

oppure dovrà essere divisibile per $(x+2)$ il fattore (x^2-a-1) e cioè $a=3$

23) I numeri reali a,b,c sono tali che $a+b+c=0$ e $a^2+b^2+c^2=1$, ne segue che $a^4+b^4+c^4$ è uguale a:

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) non è possibile stabilirlo

Soluzione C

Infatti $a^4+b^4+c^4=1-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$ inoltre

$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=(ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c)=(ab+ac+bc)^2$ e

$$ab+ac+bc=\frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\right]=-\frac{1}{2}$$

e sostituendo si ottiene il risultato.

24) Valentina e Rossella si sono iscritte alla prima classe di un liceo. Tale liceo ha due sezioni A e B le cui prime classi hanno rispettivamente x e y iscritti con x e y compresi tra 20 e 30. Sapendo che la probabilità che Valentina e Rossella si trovino nella stessa classe è $\frac{1}{2}$ quanti sono gli iscritti nelle due classi?

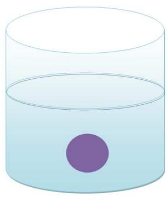
A) $x = y = 25$ B) $x = 28 \;\; e \;\; y = 21$ C) $x = 21 \;\; e \;\; y = 28$ D) Non è possibile stabilirlo

Soluzione D

Infatti la probabilità che entrambe si trovino nella prima A è $\frac{x(x-1)}{(x+y)(x+y-1)}$ analogamente, la probabilità che si trovino entrambe nella prima B è $\frac{y(y-1)}{(x+y)(x+y-1)}$. Quindi la probabilità che si trovino nella stessa prima è la somma di queste due probabilità e tale probabilità deve essere $\frac{1}{2}$ cioè $\frac{x(x-1)+y(y-1)}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{1}{2}$. Si ottiene così l'equazione $(x-y)^2 = x+y$ le cui soluzioni devono essere comprese tra 20 e 30. Quindi $x+y$ dovrà essere compreso tra 40 e 60 e dovrà essere un quadrato. L'unico quadrato compreso tra questi numeri è 49 quindi si ha il seguente sistema: $\begin{cases} x+y=49 \\ x-y=7 \end{cases}$ che ci dà $x = 28 \;\; e \;\; y = 21$

Tenuto conto che possiamo scambiare i ruoli di x e y allora può essere anche $x = 21$ e $y = 28$. Quindi non è possibile stabilirlo.

25) Una sfera di raggio 1 cm viene immersa totalmente in un recipiente cilindro di raggio 4 *cm* contenente acqua. Se il livello dell'acqua aumenta di h, quanto vale h ?



A) 0,072 *cm* B) 0,083 *cm* C) 0,096 *cm* D) 0,108 *cm*

<u>Soluzione B</u>

Infatti il volume del cilindro aumenta di $\frac{4}{3}\pi \, cm^3$ e quindi $16\pi h = \frac{4}{3}\pi$

26) Facendo riferimento al modello della geometria sferica (geometria non euclidea) quale tra queste affermazioni è falsa?

A) Le "rette" hanno lunghezza finita

B) Due triangoli sferici con angoli ordinatamente uguali sono simili

C) La somma degli angoli interni di un triangolo sferico è maggiore di un angolo piatto

D) L'area di un triangolo sferico con angoli α, β, γ è $A = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$ con R raggio della sfera.

Soluzione B

Basta consultare un qualsiasi testo che tratta le geometrie non euclidee

27) In un triangolo sapendo che il rapporto tra il prodotto dei lati e la loro somma è 75 cm^2, quanto vale il prodotto dei raggi della circonferenza inscritta e circoscritta?

A) I dati non sono sufficienti a stabilirlo B) 150 cm^2 C) 75,5 cm^2 D) 37,5 cm^2

Soluzione D

Infatti, detti R e r rispettivamente della circonferenza circoscritta e inscritta, S il prodotto dei lati, A l'area e P il perimetro, si ha: $R\,r = \dfrac{S}{4A}\dfrac{2A}{P}$

28) Il binomio a^4+4 è:

A) divisibile per a^2+2

B) divisibile per a^2-2a+2

C) non è scomponibile

D)sono sbagliate tutte le precedenti.

Soluzione B

Infatti $(a^2-2a+2)(a^2+2a+2)=a^4+4$

29) Per ottenere la tesi "*x è razionale*" quale tra le seguenti ipotesi bisogna assumere?

A) $x+x^2$ è razionale B) $x\sqrt{2}$ e $\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ sono irrazionali C) x^7 e x^{12} sono razionali

D) sono sbagliate tutte le precedenti

Soluzione C

Infatti se x^7 e x^{12} sono razionali allora lo sono anche $(x^7)^5=x^{35}$ e $(x^{12})^3=x^{36}$ e quindi lo è anche $\dfrac{x^{36}}{x^{35}}=x$. La A è falsa, per esempio basta considerare $x+x^2=1$ e anche B è falsa per esempio per $x=\sqrt{3}$

30) La seguente somma: $sen^2 1°+sen^2 3°+.....+sen^2(2n+1)°+...+sen^2 89°$ è uguale a:

A) 22 B) 23 C) 22,5 D) sono sbagliate tutte le precedenti

Soluzione C

Infatti basta notare che $sen^2\alpha°+sen^2(90°-\alpha°)=1$ e $sen^2 45°=0,5$.

Problema 1:

Data la circonferenza Γ di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e $P(x_p;y_p)$ un punto del piano, distinto dal centro della circonferenza, si definisce polare di *P* rispetto alla circonferenza la retta di equazione: $xx_p+yy_p+a\frac{x+x_p}{2}+b\frac{y+y_p}{2}+c=0$. Dimostrare che:

1) Se *P* appartiene alla polare di *Q* allora *Q* appartiene alla polare di *P* ;
2) Se *P* è un punto di Γ allora la polare di *P* coincide con la retta tangente condotta da *P* a Γ;
3) Se *P* è esterno al cerchio individuato da Γ allora la polare è la retta che unisce i punti comuni a Γ e alle rette tangenti condotte da *P* a Γ.

<u>Soluzione:</u>

1) Considerata la polare di $P(x_p;y_p)$, $xx_p+yy_p+a\frac{x+x_p}{2}+b\frac{y+y_p}{2}+c=0$, se il punto $Q(x_q;y_q)$ appartiene alla polare di $P(x_p;y_p)$ allora $x_qx_p+y_qy_p+a\frac{x_q+x_p}{2}+b\frac{y_q+y_p}{2}+c=0$, ma ciò equivale a dire che $P(x_p;y_p)$ appartiene alla polare di $Q(x_q;y_q)$.
2) Sia $C(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ il centro della circonferenza e $P(x_p;y_p)$un punto della circonferenza. Se la retta tangente in $P(x_p;y_p)$ è la retta $x=x_p$ significa che il punto *P* appartiene al diametro parallelo all'asse x e quindi esso è $P_1(-\frac{a}{2}-R;-\frac{b}{2})$ oppure $P_2(-\frac{a}{2}+R;-\frac{b}{2})$, essendo *R* il raggio della circonferenza. Scrivendo l'equazione della polare in $P_1(-\frac{a}{2}-R;-\frac{b}{2})$ oppure $P_2(-\frac{a}{2}+R;-\frac{b}{2})$ e tenuto conto che essi appartengono a Γ si ottiene la retta $x=x_p$. Se la retta tangente non è parallela all'asse y, il suo coefficiente angolare è l'antireciproco di quello della retta *CP* $m_{CP}=\frac{y_p-\frac{b}{2}}{x_p-\frac{a}{2}}$; il coefficiente angolare della retta polare è $m=-\frac{2x_p+a}{2y_p+b}$, ma $m_{CP}m=-1$, quindi anche la polare è perpendicolare alla retta *CP*, ne segue che la polare e la tangente coincidono.
3) Siano *r* ed *s* le due tangenti condotte da $P(x_p;y_p)$ a Γ e *A* e *B* i rispettivi punti di tangenza. Per la 2) *r* ed *s* sono rispettivamente la polare in *A* e in *B*. Per la 1) poiché la polare di *A* passa per *P* allora la polare di *P* passa per *A*; analogamente se ragioniamo col punto *B*, ne segue che la polare di *P* deve passare sia per *A* che per *B* cioè è la retta *AB*.

Problema 2:

Sia n un numero naturale. Con $d(n)$ indichiamo il numero dei divisori di n ($d(5)=2, d(9)=3,....$). Dimostrare che n è un quadrato se e solo se $d(n)$ è dispari.

<u>Soluzione:</u>

Fissato n, sia $D(n)$ l'insieme dei divisori di n. Consideriamo l'applicazione biiettiva di $D(n)$ in $D(n)$ tale che $x\in D(n)\to y=\frac{n}{x}\in D(n)$ .Osserviamo che $x=y\Leftrightarrow n=x^2$. Inoltre il numero dei divisori di

n è il doppio del numero delle coppie (e quindi sono in numero pari) se $x \neq y$; mentre è uguale al doppio del numero delle coppie meno 1 (e quindi è un numero dispari) se $x = y$.

Problema 3:

Tre sorelle vanno al mercato per vendere dei polli. Una ha con sé 10 polli, la seconda 16 e la terza 26. A mezzogiorno le tre donne hanno venduto allo stesso prezzo una parte dei loro polli. Passato mezzogiorno, temendo di non riuscire a vendere i polli rimasti, abbassano il prezzo e vendono quelli che restano allo stesso prezzo. Ognuna di loro riesce a vendere tutti i polli che aveva e a tornare a casa con la stessa quantità di denaro, pari a 35 euro ciascuna. A che prezzo ognuna di loro ha venduto i propri polli prima e dopo mezzogiorno?

<u>Soluzione:</u>

Siano x, y e z il numero di polli venduto da ciascuna sorella prima di mezzogiorno e m il prezzo; dopo mezzogiorno il numero di polli venduto è, rispettivamente, $10-x$, $16-y$ e $26-z$ e sia n il prezzo. Il ricavo delle sorelle sarà rispettivamente:

$mx + n(10-x) = 35$

$my + n(16-y) = 35$

$mz + n(26-z) = 35$

Ne ricaviamo il seguente sistema: $\begin{cases} mx + n(10-x) = 35 \\ my + n(16-y) = 35 \\ mz + n(26-z) = 35 \end{cases}$

Sottraendo dalla terza equazione la prima e poi la seconda otterremo successivamente,

$\begin{cases} (m-n)(z-x) + 16n = 0 \\ (m-n)(z-y) + 10n = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} (m-n)(x-z) = 16n \\ (m-n)(y-z) = 10n \end{cases}$ Dividendo la prima per la seconda si ha

$\dfrac{x-z}{y-z} = \dfrac{8}{5}$ cioè $\dfrac{x-z}{8} = \dfrac{y-z}{5}$ Quindi 8 è un divisore di $x-z$ e 5 un divisore di $y-z$. Posto $t = \dfrac{x-z}{8} = \dfrac{y-z}{5}$ si ha $x = z + 8t$ e $y = z + 5t$. Notiamo che $t > 0$ poiché $x > z$ altrimenti la prima sorella non avrebbe potuto guadagnare quanto la terza. Poiché $x < 10$, allora $z + 8t < 10$ ed essendo z e t interi positivi ne segue che $t = z = 1$ e sostituendo in $x = z + 8t$ e $y = z + 5t$ si ottiene $x = 9$ e $y = 6$.

Sostituendo i valori così ottenuti in $mx + n(10-x) = 35$

$my + n(16-y) = 35$

$mz + n(26-z) = 35$

Si ottiene $m = 3{,}75$ e $n = 1{,}25$