LiceoGarofanoCapua

CONCORSO PREMIO

MERAVIGLIOSAMENTEMATEMATICAMICHELEMENDITTO

CAPUA 4 Aprile 2011

La prova è costituita da 30 quesiti a risposta multipla e da 3 problemi.
Nei quesiti a risposta multipla una sola risposta è quella corretta. Ad ogni risposta corretta saranno attribuiti 4 punti, ad ogni risposta sbagliata 0 punti e ad ogni risposta non data 1 punto.
Alle risoluzioni dei problemi sarà attribuito un punteggio p con $0 \leq p \leq 40$.
Tempo massimo: 4 ore.
Non è consentito l'uso della calcolatrice, del cellulare, di altri dispositivi elettronici, di tavole numeriche, di testi e di appunti personali.
La Commissione, per i test, terrà conto solo delle risposte riportate nell'apposito schema.
Per le prime tre ore non sarà consentito ad alcun partecipante di allontanarsi dall'aula se non per gravi motivi.

Tabelle per le risposte ai quesiti:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Quesiti: Risposte corrette ……….. x4 =

Risposte non date ………. x 1 =

Punteggio totale quesiti =

Problemi: P_1 = …………

P_2 = …………

P_3 = ………….

Punteggio totale prova: P =

QUESITI

1) Scegliendo 2 numeri reali, a caso, nell'intervallo di estremi 0 e 1, qual è la probabilità che la loro somma sia compresa tra $\frac{1}{3}$ e 1?

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{17}{18}$ D) Sono sbagliate tutte le precedenti

2) Siano A e B due vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza. Scelto sulla circonferenza un punto P a caso, qual è la probabilità che l'angolo APB sia di 120°?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) $\frac{1}{9}$

3) In una libreria si devono disporre 6 diversi libri di Matematica, 4 diversi libri di Latino e 2 diversi libri di Storia. Tenuto conto che quelli di una stessa disciplina devono stare insieme in quanti modi si potranno disporre?

A) 34560 B) 207360 C) 69120 D) Sono sbagliate tutte le precedenti.

4) Le similitudini nel piano trasformano:

A) figure in figure congruenti B) figure in figure equivalenti
C) circonferenze in circonferenze D) rette in rette parallele

5) Dati i numeri 1,2,2,2,3,4,8,9,9 e dette rispettivamente M_1, M_2, M_3 la moda, la media aritmetica e la mediana, si ha:

A) $M_1 < M_2 < M_3$ B) $M_2 < M_3 < M_1$ C) $M_3 < M_1 < M_2$ D) $M_1 < M_3 < M_2$

6) Se i tre numeri $\log a, \log b, \log c$ formano, nell'ordine, una progressione aritmetica allora:

A) $b = ac$ B) $b = a + c$ C) $b^2 = ac$ D) $b^2 = \frac{a+b}{2}$

7) In una classe di 22 studenti si sa che:
i) almeno uno di essi non ha la sufficienza in matematica
ii) presi comunque due di essi almeno uno ha la sufficienza in matematica
Da ciò si deduce che:

A) 21 studenti hanno la sufficienza in matematica
B) almeno 11 studenti non hanno la sufficienza in matematica
C) non è possibile stabilire quanti hanno la sufficienza in matematica
D) sono errate tutte le precedenti

8) Sulla tomba di Diofanto di Alessandria (matematico del III secolo d.C.) era riportato il seguente epitaffio 'La sua adolescenza terminò dopo un sesto della sua vita; si sposò dopo un altro settimo; si fece crescere la barba dopo un altro dodicesimo e 5 anni più tardi nacque suo figlio; il figlio visse la metà degli anni del padre, che gli sopravvisse per quattro anni'. A quanti anni morì Diofanto?

A) 48 B) 60 C) 72 D) 84

9) In quale base il numero 1310 corrisponde al numero 116 in base 10?

A) 8 B) 9 C) 4 D) 5

10) Nello spazio tridimensionale le rette parallele ad una retta *t* ed aventi distanza 1 da essa sono:

A) tutte e sole le rette appartenenti ad un cilindro
B) tutte e sole le rette appartenenti ad un piano
C) due rette parallele tra loro e parallele a *t*
D) una sola retta

11) Data la successione definita per ricorrenza:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$ il termine a_{93} è uguale a:

A) 10 B) $\dfrac{1}{10^{93}}$ C) $\dfrac{1}{10}$ D) 10^{93}

12) Diabolik sa che la cassaforte della Macomber &C di Clerville ha una combinazione costituita da 6 cifre, di cui due sono uguali a 3, due sono uguali a 7 e due sono uguali a 8, ma non sa quali.
Se la combinazione inserita è giusta la cassaforte si apre, altrimenti suona l'allarme.
Qual è la probabilità che Diabolik riesca ad aprire la cassaforte?

A) $\dfrac{1}{21}$ B) $\dfrac{1}{90}$ C) $\dfrac{3}{28}$ D) $\dfrac{1}{45}$

13) Se $senx + \cos x = \dfrac{1}{2}$ allora $tgx + ctgx =$

A) $\dfrac{13}{3}$ B) $\pm\dfrac{8}{3}$ C) $\dfrac{8}{3}$ D) $-\dfrac{8}{3}$

14) Se $a(x+2)+b(x-1)=3$ per ogni $x \in \mathrm{N}$ allora $a =$

A) -1 B) 2 C) 1 D) 3

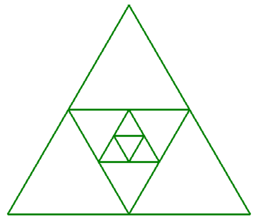
15) Nell'insieme Z dei numeri interi relativi è definita la seguente relazione: x è in relazione con y se e solo se $x \cdot y<0$.
Quali proprietà, tra le proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva, verifica la relazione?

A) solo le proprietà riflessiva e simmetrica B) solo le proprietà riflessiva e antisimmetrica
C) solo la proprietà simmetrica D) solo la proprietà transitiva.

16) Consideriamo i numeri in base 21 dove le cifre sono rappresentate dalle 21 lettere dell'alfabeto A-Z, con A=1, B=2,……..,V=20, Z=0. Cosa fa STUDIARE + ALGEBRA?

A) BENEBENE B) ABTRESEQ C) ARRETUIO D) SVHMPDMF

17) In un triangolo equilatero, congiungendo i punti medi dei lati si ottiene un altro triangolo equilatero. Ripetendo più volte questa costruzione si ottengono sempre triangoli equilateri.



Consideriamo la successione a_n delle lunghezze dei lati dei successivi triangoli equilateri. Se il primo dei triangoli ha il lato di lunghezza 2 cioè $a_1 = 2$ la successione così definita è una progressione aritmetica o geometrica e quanto vale a_n?

A) Geometrica e $a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ B) Aritmetica e $a_n = 2 + \frac{1}{2n}$

C) Non è né geometrica né aritmetica e $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ D) Aritmetica e $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

18) Tre studentesse Michela, Giada e Roberta stanno frequentando il corso di chimica. Supponiamo di sapere che Michela partecipa al 30% delle lezioni, Giada al 50% e Roberta all'80%. Supponiamo di sapere che ognuno delle tre decide di partecipare o meno a una lezione indipendentemente dalle altre. Calcolare la probabilità che alla lezione di domani siano presenti tutte e tre.

A) 0.93 B) 0.12 C) 0.24 D) 0.88

19) Quale tra le seguenti funzioni verifica l'identità $f(2x+1) = 2(f(x))^2$?

A) $\log_2 x$ B) 2^x C) 2^{-x} D) $\frac{x^2-1}{2}$

20) Sull'isola "Chenoncé" vivono due tribù una formata da persone che dicono sempre la verità e sono dette Cavalieri e l'altra che dicono sempre bugie e sono dette Furfanti. Un esploratore incontra 4 abitanti dell'isola: Salvatore, Andrea, Valentina e Rossella. Essi affermano, rispettivamente: Salvatore "Almeno uno di noi è un furfante". Andrea " Tra noi ci sono almeno due Furfanti". Valentina"Tra di noi ci sono almeno tre Furfanti". Rossella" Siamo tutti Furfanti". Ne segue che:

A) Salvatore e Andrea sono Furfanti, Valentina e Rossella Cavalieri

B) Sono tutti Cavalieri C) Sono tutti Furfanti

D) Salvatore e Andrea sono Cavalieri, Valentina e Rossella Furfanti.

21) Due amici, Salvatore e Andrea, stanno giocando a carte. Vince chi pesca la carta più alta. Ad ogni mano viene attribuito 1 punto a chi vince e 0 all'altro. Il gioco termina quando il primo di essi totalizza 10 punti. Sul punteggio di 9 a 8 in favore di Salvatore decidono di sospendere il gioco. Se la somma in palio per il vincitore era 170 euro come è "equo" suddividere questa somma?

A) Salvatore 127,5 euro e Andrea 42,5 euro B) 85 euro ciascuno

C) Salvatore 90 euro e Andrea 80 euro D) Salvatore 100 euro e Andrea 70 euro

22) Per quanti valori del parametro a il polinomio $(x-1)(x^2-a^2)(x^2-a-1)$ è divisibile per il polinomio x^2+x-2 ?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5

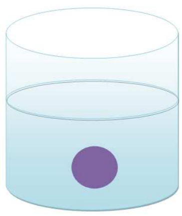
23) I numeri reali *a,b,c* sono tali che $a+b+c=0$ e $a^2+b^2+c^2=1$, ne segue che $a^4+b^4+c^4$ è uguale a:

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) non è possibile stabilirlo

24) Valentina e Rossella si sono iscritte alla prima classe di un liceo. Tale liceo ha due sezioni A e B le cui prime classi hanno rispettivamente x e y iscritti con x e y compresi tra 20 e 30. Sapendo che la probabilità che Valentina e Rossella si trovino nella stessa classe è $\frac{1}{2}$ quanti sono gli iscritti nelle due classi?

A) $x=y=25$ B) $x=28$ *e* $y=21$ C) $x=21$ *e* $y=28$ D) Non è possibile stabilirlo

25) Una sfera di raggio 1 cm viene immersa totalmente in un recipiente cilindro di raggio 4 *cm* contenente acqua. Se il livello dell'acqua aumenta di *h*, quanto vale *h* ?



A) 0,072 *cm* B) 0,083 *cm* C) 0,096 *cm* D) 0,108 *cm*

26) Facendo riferimento al modello della geometria sferica (geometria non euclidea) quale tra queste affermazioni è falsa?

A) Le "rette" hanno lunghezza finita

B) Due triangoli sferici con angoli ordinatamente uguali sono simili

C) La somma degli angoli interni di un triangolo sferico è maggiore di un angolo piatto

D) L'area di un triangolo sferico con angoli α, β, γ è $A=R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$ con R raggio della sfera.

27) In un triangolo sapendo che il rapporto tra il prodotto dei lati e la loro somma è 75 cm^2, quanto vale il prodotto dei raggi della circonferenza inscritta e circoscritta?

A) I dati non sono sufficienti a stabilirlo B) 150 cm^2 C) 75,5 cm^2 D) 37,5 cm^2

28) Il binomio $a^4 + 4$ è:

A) divisibile per $a^2 + 2$ B) divisibile per $a^2 - 2a + 2$

C) non è scomponibile D)sono sbagliate tutte le precedenti.

29) Per ottenere la tesi "*x è razionale*" quale tra le seguenti ipotesi bisogna assumere?

A) $x + x^2$ è razionale B) $x\sqrt{2}$ e $\frac{x}{\sqrt{2}}$ sono irrazionali C) x^7 e x^{12} sono razionali

D) sono sbagliate tutte le precedenti

30) La seguente somma: $sen^2 1° + sen^2 3° + ... + sen^2 (2n+1)° + ... + sen^2 89°$ è uguale a:

A) 22 B) 23 C) 22,5 D) sono sbagliate tutte le precedenti

Problema 1:

Data la circonferenza Γ di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e $P(x_p; y_p)$ un punto del piano, distinto dal centro della circonferenza, si definisce polare di P rispetto alla circonferenza la retta di equazione: $xx_p + yy_p + a\frac{x + x_p}{2} + b\frac{y + y_p}{2} + c = 0$. Dimostrare che:

1) Se P appartiene alla polare di Q allora Q appartiene alla polare di P ;
2) Se P è un punto di Γ allora la polare di P coincide con la retta tangente condotta da P a Γ;
3) Se P è esterno al cerchio individuato da Γ allora la polare è la retta che unisce i punti comuni a Γ e alle rette tangenti condotte da P a Γ.

Problema 2:

Sia n un numero naturale. Con $d(n)$ indichiamo il numero dei divisori di n ($d(5) = 2, d(9) = 3,....$). Dimostrare che n è un quadrato se e solo se $d(n)$ è dispari.

Problema 3:

Tre sorelle vanno al mercato per vendere dei polli. Una ha con sé 10 polli, la seconda 16 e la terza 26. A mezzogiorno le tre donne hanno venduto allo stesso prezzo una parte dei loro polli. Passato mezzogiorno, temendo di non riuscire a vendere i polli rimasti, abbassano il prezzo e vendono quelli che restano allo stesso prezzo. Ognuna di loro riesce a vendere tutti i polli che aveva e a tornare a casa con la stessa quantità di denaro, pari a 35 euro ciascuna. A che prezzo ognuna di loro ha venduto i propri polli prima e dopo mezzogiorno?