Il sottoscritto dichiara ai sensi dell'art. 47 del D.P.R. 28/12/2000, n.445 che la seguente copia è conforme all'originale pubblicato su "Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze MM. FF. NN. dell'Università di Cagliari" fasc. 1, vol. 74 / 2004 .

Nuove classi di funzioni scalari quasi concave generalizzate ed applicazioni a problemi di ottimizzazione

ROBERTO RAUCCI
Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche, Università di Salerno, via Ponte Don Melillo,84084,Fisciano, (Sa)
E-mail: **rraucci@unisa.it**

LUIGI TADDEO
Liceo Scientifico "L.Garofano", Piazza D'Armi, 81040, Capua (Ce)
E-mail: luigitaddeo@inwind.it

Abstract. In this paper new classes of generalized-concave functions are introduced and studied. Moreover some properties about optimization are provided.

1.Introduzione

E' noto il ruolo importante che rivestono le funzioni scalari concave e quasi concave generalizzate in problemi di ottimizzazione, molti dei quali di interesse economico (v. per es. [1-9]). In questo breve lavoro, dopo aver caratterizzato le funzioni scalari quasi concave generalizzate classiche più note (v. per es. [3]) in termini di insiemi, grazie ad una nuova nozione di insieme convesso rispetto a due insiemi, si introducono tre nuove classi di funzioni quasi concave generalizzate, tutte distinte dalle precedenti, se le funzioni non sono semicontinue superiormente (in breve, d'ora in avanti, s.c.s.). Si migliorano, grazie a queste nuove classi di funzioni, alcuni noti risultati di ottimizzazione, anche nel caso in cui le funzioni siano s.c.s. Si studiano queste nuove in ipotesi di s.c.s. e si dimostra che solo una delle tre resta distinta da tutte le altre, mentre nel caso di funzioni continue le nuove introdotte coincidono con quelle classiche. Dal modo con cui sono state definite queste nuove classi si nota un modo naturale per introdurne delle altre che potrebbero migliorare qualche altro risultato di ottimizzazione. Il lavoro risulta così strutturato: nel secondo paragrafo si caratterizzano in termini di insiemi sia le classiche che le nuove e si confrontano, nel terzo si generalizzano alcuni risultati di ottimizzazione, nel quarto si studiano i casi particolari di s.c.s. e continuità.

2.Risultati preliminari

In questo paragrafo f denoterà una funzione definita in un insieme convesso X di $\Re^n$, e a valori in $\Re$. Innanzitutto caratterizziamo le proprietà dei seguenti tipi di funzioni (vedere, ad esempio, [3] per le definizioni):

- quasi concave (oppure, più brevemente, qc);
- strettamente quasi concave (sqc);
- semi strettamente quasi concave (ssqc);
- semi quasi concave (seqc);
- quasi concave in senso esteso (qcse);
- strettamente quasi concava in senso esteso (sqcse);

attraverso gli insiemi:

$L_h = \{x \text{ tali che } f(x) \geq h\},\ \ S_h = \{x \text{ tali che } f(x) = h\},\ \ T_h = \{x \text{ tali che } f(x) > h\}$

e le loro chiusure.

Per fare ciò premettiamo quanto segue.

Def. 2.1: Diremo che l'insieme A è convesso rispetto agli insiemi B e C
$\Leftrightarrow x \in B, y \in C$ e $t \in (0;1) \Rightarrow \mathrm{z = x + t(y - x) \in A}$

Se A è convesso rispetto a B e B diremo, più brevemente, che A è convesso rispetto a B.

Def. 2.2: Diremo che l'insieme A è propriamente convesso rispetto agli insiemi B e C
$\Leftrightarrow x \in B, y \in C,\ \mathrm{x \neq y}$ e $t \in (0;1) \Rightarrow \mathrm{z = x + t(y - x) \in A}$

Se A è propriamente convesso rispetto a B e B diremo, più brevemente, che A è propriamente convesso rispetto a B.

Il risultato che segue è, per quanto riguarda i), "noto"(vedere [7], per esempio); la prova delle altre sue parti è immediata.

Prop. 2.1:
i) L_h è convesso $\forall h \in \Re$ se e solo se f è quasi concava;
ii) T_h è propriamente convesso rispetto a S_h e L_h $\forall h \in \Re$ se e solo se f è strettamente quasi concava;
iii) T_h è convesso rispetto a S_h e T_h $\forall h \in \Re$ se e solo se f è semi strettamente quasi concava;
iv) L_h è convesso rispetto a S_h e T_h $\forall h \in \Re$ se e solo se f è semi quasi concava;
v) $coS_h \subseteq L_h$ $\forall h \in \Re$ se e solo se f è quasi concava in senso esteso;
vi) T_h è propriamente convesso rispetto a S_h $\forall h \in \Re$ se e solo se f è strettamente quasi concava in senso esteso.

Ricordiamo che: dato un insieme A, con coA si indica il più piccolo convesso che contiene A.
Adesso introduciamo nuovi tipi.

Def. 2.3: f è debolmente strettamente quasi concava in senso esteso $\Leftrightarrow$ $\overline{T_h}$ è propriamente convesso rispetto a S_h $\forall h \in \Re$ cioè se e solo se
$f(x) = f(y),\ x \neq y,\ t \in (0;1),\ \ z = x + t(y - x) \Rightarrow \exists z_n \to z$ tale che $f(z_n) > f(x)$
$\forall n \in \mathrm{N}$.

Def. 2.4: f è debolmente quasi concava in senso esteso $\Leftrightarrow$ $\mathrm{co}S_h \subseteq \overline{L_h}$ $\forall h \in \Re$ cioè se e solo se $f(x) = f(y),\ t \in (0;1),\ z = x + t(y - x) \Rightarrow \exists z_n \to z$ tale che $f(z_n) \geq f(x)$ $\forall n \in N$.

Def. 2.5: f *è* debolmente semi quasi concava $\Leftrightarrow$ $\overline{L_h}$ è convesso rispetto a S_h e T_h $\forall h \in \Re$ cioè se e solo se $f(y) > f(x),\ t \in (0;1),\ z = x + t(y - x) \Rightarrow \exists z_n \to z$ tale che $f(z_n) \geq f(x)$ $\forall n \in N$.

Nel diagramma 1 sono riassunte tutte e sole le implicazioni esistenti tra i 9 tipi di concavità generalizzata considerati.
Una parte dei risultati e degli esempi necessari per provarlo è già nota in letteratura (vedere [3], per esempio); della parte non nota in letteratura, riportiamo solo la seguente Prop.2.2 ed il seguente Esempio 2.1 in quanto il resto è deducibile o banalmente o con tecniche non distanti da quelle qui usate.

Prop. 2.2

T_h convesso rispetto a S_h e T_h $\forall h \in \Re \Rightarrow coS_h \subseteq \overline{L_h} \quad \forall h \in \Re$.

*Dimostrazione.*Supponiamo, per assurdo, che esiste $h \in \Re$ tale che coS_h non sia contenuto in $\overline{L_h}$. Da ciò segue che esistono $x, y \in S_h$ ed esiste $t \in (0;1)$ tali che $z = x + t(y - x) \notin \overline{L_h}$. Allora esiste un numero reale positivo r tale che, detto C il cerchio di centro z e raggio r, si abbia $C \cap L_h = \emptyset$. Denotato con $\overline{mn}$ il segmento intersezione tra il segmento $\overline{xy}$ e il cerchio C, si ha $\forall s \in \overline{mn}$, $f(s) < h = f(x) = f(y)$. Sia $s_0 \in \overline{mn}$, si ha $x \in T_{f(s_0)}$, $s_0 \in S_{f(s_0)}$ e quindi, per ipotesi, $s_0 + t(x - s_0) \in T_{f(s_0)}$ $\forall t \in (0;1)$ e, analogamente, $s_0 + t(y - s_0) \in T_{f(s_0)}$ $\forall t \in (0;1)$. Dunque, $\forall u \in \overline{mn}$, con u distinto da m, n e s_0, si ha $f(u) > f(s_0)$. Scambiando i ruoli di s_0 e u si ottiene $f(s_0) > f(u)$ e ciò è assurdo.

Esempio 2.1

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } 0 \le x < 1/2 \\ -2 & \text{se } x = 1/2 \\ -2x & \text{se } 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

Questa funzione verifica le def. 2.3, 2.4 e 2.5. Non verifica le def. di qc, sqc, ssqc, seqc, qcse, sqcse.

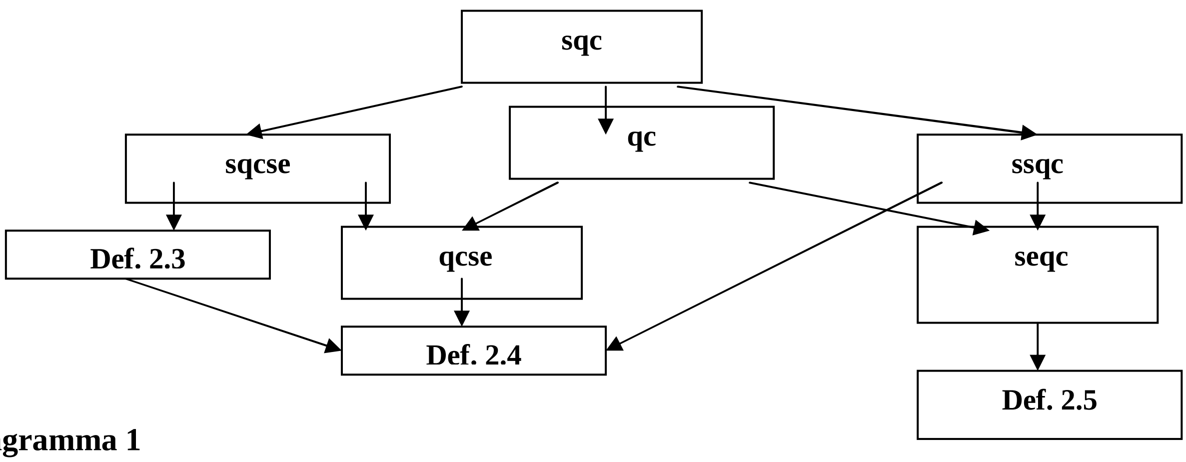


Diagramma 1

A $\rightarrow$ B: si intende che la classe A è contenuta in quella B.

3. **Sui massimi locali e globali**.

In questo paragrafo si presentano alcuni risultati riguardanti la convessità dell'insieme $S = \left\{ x \in X \text{ tale che } f(x) = \max_{y \in X} f(y) \right\}$ in ipotesi " più deboli" e in ipotesi diverse; ove le prove richiedenti solo applicazioni semplici di definizioni non sono state riportate.

E' noto il seguente teorema ([3] Teor.6.1, pag. 47), qui "tradotto" in termini di insiemi:

Teorema A. Sia $X \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f : X \to \Re$

i) Se $coS_h \subseteq L_h$ $\forall h \in \Re$ allora S è convesso.

ii) Se T_h è propriamente convesso rispetto a S_h $\forall h \in \Re$ e $S \neq \emptyset$ allora f ha un unico punto di massimo globale .

La (ii) si può indebolire nel seguente senso:

Prop. 3.1. Se $\overline{T_h}$ è propriamente convesso rispetto a S_h $\forall h \in \Re$ e se $S \neq \emptyset$ allora f ha un unico punto di massimo globale .

Osservazione 3.1. L'ipotesi $\overline{T_h}$ è propriamente convesso rispetto a S_h $\forall h \in \Re$ può essere ulteriormente indebolita infatti, affinché da $S \neq \emptyset$ segua che f abbia un unico punto di massimo globale è necessario e sufficiente che, $\forall h \in \Re$, $|S_h| > 1 \Rightarrow T_h \neq \emptyset$.

La convessità di S si può ottenere con ipotesi diverse da quella usata in (i):

Prop.3.2. Se sono soddisfatte le seguenti ipotesi:
(a) $coS_h \subseteq \overline{L_h}$ $\forall h \in \Re$
(b) per ogni successione x_n convergente a z, con $f(x_n)$ costante si ha $f(z) \geq f(x_n)$
allora S è convesso.

Per brevità omettiamo gli esempi che mostrano che il verificarsi di (a) e (b) non implica che $coS_h \subseteq L_h$ e viceversa che da $coS_h \subseteq L_h$ non si ottiene necessariamente la (b). Da ciò segue che la Prop 3.2 e il Teorema A non sono confrontabili.

E' noto il seguente teorema ([3] Teor.6.2, pag. 47) qui tradotto in termini di insiemi:

Teorema B. Se L_h è convesso rispetto a S_h e T_h $\forall h \in \Re$ allora se x è un punto di massimo locale stretto esso è di massimo globale.

Questo teorema si dimostra in ipotesi più deboli, come mostra la seguente proposizione:

Prop. 3.3. Se $\overline{L_h}$ è convesso rispetto a S_h e T_h $\forall h \in \Re$ allora se x è un punto di massimo locale stretto esso è di massimo globale.

*Dimostrazione.*Supponiamo, per assurdo, che x non sia di massimo globale, allora $\exists y$ tale che $f(y) > f(x)$.Da $x \in S_{f(x)}$ e $y \in T_{f(x)}$,allora, $\forall t \in (0;1)$ si ha che $z = x + t(y - x) \in \overline{L_{f(x)}}$ cioè $\exists x_n \in L_{f(x)}$ tale che $f(x_n) \geq f(x)$ $\forall n \in \mathrm{N}$ e x_n converge a z. Poiché x è un punto di massimo locale stretto allora $\exists r$ positivo tale che $f(p) < f(x)\ \forall p \in (C(x,r) - \{x\})$, dove $C(x,r)$ è il cerchio di centro x e raggio r . Da $z = x + t(y - x)$ si ha $z - x = t(y - x)$, dunque $d(x,z) = td(x,y)$. Prendendo

$$t < \min(1; \frac{r}{2d(x,y)}),$$

si ottiene che

$$d(x,z) < \frac{r}{2}.$$

Poiché la successione x_n converge a z, $\exists n_0 \in \mathrm{N}$ tale che $x_n \in C_1(\mathrm{z}, \frac{\mathrm{r}}{2})$ $\forall n \geq n_0$.

Allora

$$\forall n \geq n_0 \;\; d(x_n, x) \leq d(x_n, z) + d(x,z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

cioè $x_n \in C(x,r)$ contro il fatto che $f(x_n) \geq f(x)$.

Ora, dal seguente esempio si può dedurre che la (ii) del teorema A e il teorema B "sono stati indeboliti" anche in situazioni in cui $S \neq \varnothing$, infatti la funzione *f* verifica le def. 2.3 e 2.5 ma non è sqcse né seqc .

Esempio 3.1

$$f(x) = \begin{cases} 4x-5 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ -2x+1 & \text{se } 1 < x \leq 3 \text{ e } x \neq 2 \\ -5 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

4. **Con ipotesi di s.c.s. e continuità**

In questo paragrafo si confrontano le definizioni utilizzate prima nell'ipotesi che f sia s.c.s. Per tali funzioni si ottiene che le definizioni 2.5 e seqc risultano equivalenti, così come le definizioni 2.4 e sqcse, mentre non lo sono le 2.3 e qcse. Supponendo che f sia continua allora anche le 2.3 e qcse risultano equivalenti.

Nelle due proposizioni che seguono, la cui prova è immediata, si suppone *f* s.c.s.

Prop. 4.1. L_h convesso rispetto a S_h e T_h se e solo se $\overline{L_h}$ è convesso rispetto a S_h e T_h.

Prop. 4.2. $coS_h \subseteq L_h$ se e solo se $coS_h \subseteq \overline{L_h}$.

Il seguente esempio mostra che la 2.3 non è equivalente alla qcse, in generale, neanche nel caso in cui f sia s.c.s.

Esempio 4.1. Consideriamo $f_1 : [0;1] \to \Re$ così definita:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{n(n+1)x + n - 1}{2n(2n-1)} & \text{se } \dfrac{1}{n+1} \leq x < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

$f_2 : [0;2] \to \Re$ così definita:

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in [0;1] \\ f_1(2-x) & \text{se } x \in]1;2] \end{cases}$$

$f_3 : [2;3] \to \Re$ così definita:

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad x = 2 \\ 2 \quad \text{se} \quad x = 3 \\ \dfrac{(n+1)x - 2n - 1}{2(2n+1)} \quad \text{se} \quad 2 + \dfrac{1}{n+1} \le x < 2 + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

$f_4 : [2;4] \to \Re$ così definita:

$$f_4(x) = \begin{cases} f_3(x) \ \text{ se } \ x \in [2;3] \\ f_3(6-x) \ \text{ se } \ x \in]3;4] \end{cases}$$

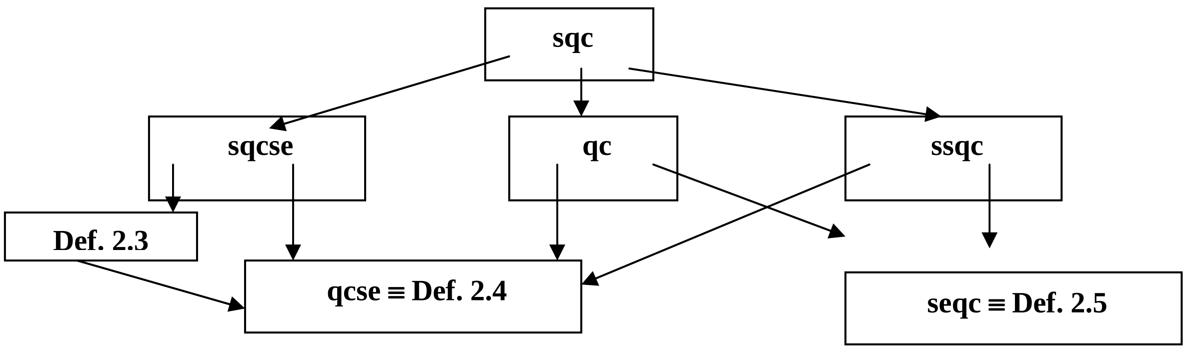
Infine $f : [0;4] \to \Re$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} f_2(x) \ \text{ se } \ x \in [0;2] \\ f_4(x) \ \text{ se } \ x \in]2;4] \end{cases}$$

La funzione f così definita è s.c.s., $\overline{T_h}$ è propriamente convesso rispetto a S_h $\forall h \in \Re$, ma $S_0 = \{0,2,4\}$, $T_0 =]0;4[- \{2\}$, dunque T_0 non è propriamente convesso rispetto a S_0.

Tenuto conto di quanto enunciato e di quanto già noto in letteratura, adesso, si può ottenere facilmente il seguente diagramma 2:

Diagramma 2
f è s.c.s



Come anticipato all'inizio del paragrafo, inoltre, si ha:

Prop. 4.3**.** Se f è continua allora:
$\overline{T_h}$ propriamente convesso rispetto a $S_h \Rightarrow T_h$ propriamente convesso rispetto a S_h.
Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $\exists\, x, y \in S_h$, $x \ne y$, $t \in (0;1)$ e $z = x + t(y-x) \notin T_h$. Per ipotesi $z \in \overline{T_h}$ e, poiché f è continua, si ha $f(z) = h$. Per il teorema di Weierstrass e per la

prop.3.1, applicati al segmento $\overline{xy}$, esiste ed è unico $x_1 \in \overline{xy}$ tale che x_1 è punto di max assoluto di f su $\overline{xy}$. Supponiamo, per fissare le idee, che $x_1 \in \overline{xz}$. Ragionando come prima sul segmento $\overline{zy}$, si ha che esiste ed è unico x_2 punto di max assoluto di f su $\overline{zy}$, inoltre $h = f(z) < f(x_2) < f(x_1)$. Applicando il teorema di Bolzano al segmento $\overline{xz}$ si ha che $\exists\, x_3 \in \overline{xz}$ tale che $f(x_3) = f(x_2)$. Dunque $x_2, x_3 \in S_{f(x_2)}$ con $x_2 \neq x_3$ e ciò implica, per ipotesi, che, poiché $z \in \overline{x_2 x_3}$ ed è distinto sia da x_2 che da x_3, $z \in \overline{T_{f(x_2)}}$. Per la continuità di f si ha $f(z) \geq f(x_2)$ e ciò è assurdo.

Dunque, in ipotesi di continuità, tutte le classi nuove di funzioni definite coincidono con quelle già note.

Osservazione 4.1.Nella prop. 4.3 non si può indebolire l'ipotesi di continuità con la semicontinuità inferiore, come mostra l'esempio 2.1.

5. **Eventuali sviluppi**

In modo analogo a quanto fatto per introdurre le nuove funzioni presentate in questo lavoro se ne possono definire altre (per es. $\overline{T_h}$ è propriamente convesso rispetto a L_h e S_h, $\overline{T_h}$ è convesso rispetto a T_h e S_h, etc.), le quali potrebbero migliorare qualche altro risultato di ottimizzazione. L'elevato numero di varianti possibili e i conseguenti confronti darebbero luogo, a nostro avviso, ad un lavoro eccessivamente lungo. Per questa ragione, in questo lavoro, ci siamo limitati a presentare e a studiare solo le funzioni introdotte che ci hanno già fornito nuovi risultati di ottimizzazione. Rinviamo ad un futuro lavoro l'introduzione e lo studio delle altre che consentiranno di migliorare altri risultati di ottimizzazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARROW K.J., ENTHOVEN A.C. *Quasiconcave Programming*, Econometrica, 29, 1961, 779-800.

[2] AVRIEL M., *Nonlinear programming: anaysis and methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[3] CAMBINI R., *Nuove classi di funzioni scalari concave generalizzate*, Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali-Anno 17°, Fascicolo 1°,1994,35-52.

[4] CAMBINI R., F*unzioni scalari affini generalizzate*, Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali-Anno 18°, Fascicolo 2°,1995,153-163.

[5] CROUZEIX J.P., FERLAN J.A., *Criteria for quasiconvexity and pseudoconvexity: relationships and comparisons*, Math. Programming, 23, 1982, 193-205.

[6] GINSBERG W., *Concavity and quasi-concavity in economics*, J.Econ.Theory, 6,1973, 596-605.

[7] MANGASARIAN O.L., *Nonlinear programming*, McGram-Hill, New York, 1969.

[8] MARTOS B., *Nonlinear programming theory and methods* , North-Holland, Amsterdam, 1975.

[9] THOMPSON W.A., PARKE D.W., *Some properties of generalized concave functions*, Operation Research, 21, 1973, 305-313.