Sul Modello di Leontief

Mario Nocera[1] - Roberto Raucci[2] - Luigi Taddeo[3]

Sunto: In questo lavoro presentiamo il modello input-output di Leontief. La dimostrazione del teorema di esistenza, unicità e non negatività e altri risultati presentati in questo articolo non sono contenuti nella trattazione standard. Tale modello potrebbe essere presentato a studenti di una scuola superiore dopo la trattazione delle matrici e dei sistemi lineari mostrando, così, una situazione non matematica in cui questi concetti giocano un ruolo centrale.

Abstract: The present paper concerns with the input-output model by Leontief. The proof of the existence, singleness and non-negativity theorem as well as the other results present in this article will not be found in a standard treatment. The aforesaid model could be taught high school students who have studied the matrixes and the linear systems by showing, thus, the central role these concepts have in a non-mathematical situation.

Parole chiave: Matrici, Sistemi Lineari, Beni.

[1] Istituto D'Arte S. Leucio, Via Tenga, 116 - 81100 Caserta - mario.nocera@istruzione.it
[2] Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche, Università degli Studi di Salerno, Via Ponte Don Melillo - 84084, Fisciano (Salerno) - rraucci@unisa.it
[3] Liceo Scientifico " L.Garofano", Via Napoli, 1 - 81043 Capua (Ce) - luigitaddeo@inwind.it

1. INTRODUZIONE

Consideriamo n beni, con $n \in \mathbb{N}$, e conveniamo di misurarne le quantità usando per tutti la stessa unità di misura: il valore, in migliaia di euro, su un fissato mercato nel quale ciascuno dei beni ha un preciso valore. In altri termini, per esempio, se un bene è rappresentato dalle patate, per noi la quantità pari a 1 di patate non vorrà dire una patata o un kg di patate, ma quella quantità di patate che sul nostro mercato vale esattamente un migliaio di euro. Notiamo che con questa convenzione possiamo usare la stessa unità di misura per beni "completamente non confrontabili dal punto di vista delle unità di misura standard"; per esempio, patate e automobili!

Per produrre quantità di ogni bene abbiamo a disposizione una tecnologia che lo consente usando quantità di altri beni e del bene stesso. Per rendere il modello più semplice da trattare ipotizziamo: se per produrre un'unità di un certo bene ho bisogno di un dato vettore **v** le cui componenti sono le quantità dei diversi beni (incluso il bene stesso) allora per produrne una quantità pari a k (numero reale non negativo) avrò bisogno del vettore k**v**.

Denotiamo con a_{ij} la quantità del bene i-esimo necessario alla tecnologia per produrre un'unità del bene j-esimo e sia A la matrice, quadrata e di ordine n, detta matrice tecnologica, costituita dagli elementi a_{ij} così definiti.

Notiamo che:

1) $a_{ij} \geq 0 \ \forall \mathrm{i,j} \in \{1,....,\mathrm{n}\}$

2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \ \forall \mathrm{j} \in \{1,...,\mathrm{n}\}$,

infatti la somma degli elementi della colonna j-esima rappresenta il costo di produzione del bene j-esimo e quindi tale bene sarà inserito nel processo industriale di produzione solo se il costo per produrne una fissata quantità è inferiore al valore della quantità prodotta (altrimenti quel bene non sarà prodotto ma, eventualmente, solo acquistato).

Denotiamo con $c = (c_1, ..., c_n)$ il vettore di $\mathbb{R}^n$ che fornisce la quantità degli n beni destinati ai consumi (e quindi $c_i \geq 0 \ \ \forall \mathrm{i} \in \{1,...,\mathrm{n}\}$), con

$\overline{x} = (\overline{x_1},...,\overline{x_n})$ il vettore di $\mathbb{R}^n$ che fornisce la quantità degli n beni complessivamente prodotti; quantità delle quali una parte è, in generale, destinata alla produzione dei beni stessi, un'altra ai consumi.

Per ogni bene i vale: $\overline{x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j} + c_i$ da cui si ottiene il sistema lineare (di n equazioni in n incognite), che diremo sistema lineare di Leontief, $(I - A)\overline{x} = c$, dove I denota la matrice unitaria di ordine n, $\overline{x}$ è il vettore dei beni prodotti (ovviamente $\overline{x_i} \geq 0 \quad \forall \mathrm{i} \in \{1,...,\mathrm{n}\}$).

Il seguente esempio (vedere [4]), per ragioni di semplicità, considera un sistema economico con due soli comparti: i prodotti industriali e quelli agricoli. Ciò vuol dire che aggreghiamo i diversi prodotti industriali pensandoli come se fossero un unico bene e così pure per quelli agricoli.

Esempio1.1

Supponiamo che per ogni arbitraria quantità da produrre di prodotti industriali ne serva il 40% di prodotti industriali e il 40% di quelli agricoli; invece per produrla di prodotti agricoli ne bastano il 2,5% di prodotti industriali e il 30% di quelli agricoli. Siano 210 e 60 le quantità richieste per i consumi (rispettivamente industriali e agricoli). Si ha: $A = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 \\ 1/40 & 3/10 \end{pmatrix}$; $c = (210; 60)$. Il sistema di Leontief è

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x_1 - \frac{3}{10}x_2 = 210 \\ -\frac{1}{40}x_1 + \frac{7}{10}x_2 = 60 \end{cases}$$ da cui la soluzione (400;100).

Le questioni matematiche che si pongono sono:
Il sistema ha soluzioni?
Se sì, quante ne ha?
Le soluzioni sono accettabili, cioè $\overline{x_i} \geq 0 \quad \forall \mathrm{i} \in \{1,...,\mathrm{n}\}$?

A queste questioni e ad altre collegate rispondiamo con contenuti non contemplati nella trattazione standard.

2. ESISTENZA, UNICITÀ E NON NEGATIVITÀ DELLA SOLUZIONE

In questo paragrafo dimostreremo l'esistenza, l'unicità e la non negatività della soluzione del sistema lineare di Leontief.

Proposizione 2.1

Ipotesi:

1) A è una matrice quadrata di ordine *n, n* ∈ ℕ, tale che $a_{ij} \geq 0$ e
2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \ \forall j \in \{1,...,n\}$,
3) *c* è un vettore di ordine *n* a coordinate non negative.

Tesi:

1) il sistema $(I - A)x = c$ ammette un'unica soluzione $\overline{x} = (\overline{x_1},...,\overline{x_n})$
2) $\overline{x_i} \geq \overline{c_i} \ \forall i \in \{1,...,n\}$(e quindi, in particolare, si ha che la soluzione ha coordinate non negative).

Dimostrazione

Procediamo per induzione sull'ordine *n* della matrice A. Se *n*= 1 il sistema si riduce all'equazione $(1 - a_{11})x_1 = c_1$ con $a_{11} \in [0;1[$ e quindi si verifica la tesi. Supponiamo adesso che la tesi sia soddisfatta per tutti i sistemi lineari di Leontief con matrice A di ordine *n*-1 e proviamo allora che essa vale anche per quelli di ordine *n*. Proviamo che:

1) se $y = (y_1,..., y_n)$ è una soluzione di un siffatto sistema allora $y_i \geq 0 \ \forall i \in \{1,...,n\}$

Procediamo per assurdo e quindi supponiamo che ci sia almeno una coordinata negativa. Allora, tenuto conto di ciò e della seguente uguaglianza (ottenuta sommando membro a membro tutte le equazioni del sistema): $\sum_{j=i}^{n}(1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij})x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j$ si deduce che almeno una coordinata della soluzione $y = (y_1,..., y_n)$ deve essere positiva. Supponiamo, per fissare le idee, che essa sia y_n.

Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} (1-a_{1,1})x_1 - a_{1,2}x_2 + .. - a_{1,n-1}x_{n-1} = c_1 + a_{1,n}y_n \\ \text{...} \\ -a_{n-1,1}x_1 - a_{n-1,2}x_2 + .. + (1-a_{n-1,n-1})x_{n-1} = c_{n-1} + a_{n-1,n}y_n \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione $(y_1,...,y_{n-1})$; d'altra parte essendo questo un sistema lineare di Leontief (ciò è vero per le ipotesi fatte e perché $y_n > 0$) la cui matrice tecnologica ha ordine *n*-1 per l'ipotesi d'induzione, avrà un'unica soluzione e tale soluzione avrà coordinate non negative e ciò è assurdo.

Dunque la soluzione $y = (y_1,..., y_n)$ ha coordinate tutte non negative.

1) Il sistema non potrà avere due soluzioni distinte. Infatti se $\overline{x} = (\overline{x_1},...,\overline{x_n})$ e $\overline{y} = (\overline{y_1},...,\overline{y_n})$ fossero due soluzioni distinte e, per esempio, $\overline{x_n} > \overline{y_n}$ allora $\overline{y} - \overline{x} = (\overline{y_1} - \overline{x_1},..,\overline{y_n} - \overline{x_n})$ sarebbe una soluzione del sistema omogeneo associato (che è ancora un sistema lineare del modello di Leontief) e avrebbe almeno una coordinata negativa, contro quanto dimostrato in 1).
2) Dimostriamo adesso che esiste una soluzione. Infatti se ciò non fosse vero allora il sistema omogeneo associato avrebbe infinite soluzioni e ciò non è possibile per quanto dimostrato in 2)
3) Dimostriamo adesso che l'unica soluzione $\overline{x} = (\overline{x_1},...,\overline{x_n})$ del sistema è tale che $\overline{x_i} \geq \overline{c_i}$ $\forall \mathrm{i} \in \{1,...,\mathrm{n}\}$.

Infatti, per esempio, $\overline{x_1} = \dfrac{c_1 + a_{12}\overline{x_2} + .. + a_{1n}\overline{x_n}}{1 - a_{11}}$ e tenuto conto che

$a_{ij} \geq 0$, $\overline{x_j} \geq 0$ $\forall i, j \in \{1,..,n\}$ e $1 - a_{11} > 0$ si ottiene che $\overline{x_1} \geq c_1$. Allo stesso modo si ragiona con le altre coordinate.

Osservazione 2.1

Ci chiediamo rispetto alla prima coordinata della soluzione $\overline{x} = (\overline{x_1},...,\overline{x_n})$, per esempio, quando accade che $\overline{x_1} > c_1$ e quando $\overline{x_1} = c_1$.

A tale proposito si ha:

$\overline{x_1} = c_1$ se e solo se $a_{1j}\overline{x_j} = 0 \ \ \forall j \in \{1,..,n\}$ o, in modo equivalente, $\overline{x_1} > c_1$ se e solo se esiste $j \in \{1,..,n\}$ tale che $a_{1j}\overline{x_j} \neq 0$.

Proviamo $\Rightarrow$

Da $\overline{x_1} = \dfrac{c_1 + a_{12}\overline{x_2} + .. + a_{1n}\overline{x_n}}{1 - a_{11}} \geq a_{12}\overline{x_2} + ... + a_{1n}\overline{x_n} + c_1 \geq c_1$ segue che, se $\overline{x_1} = c_1$ allora $a_{12}\overline{x_2} = .. = a_{1n}\overline{x_n} = 0$ e, inoltre, deve valere almeno una tra $c_1 = 0$ e 1-$a_{11} = 1$ da cui $a_{11}\overline{x_1} = 0$. Così è provata l'implicazione.

Proviamo $\Leftarrow$

Per provare l'inverso supponiamo che $a_{1j}\overline{x_j} = 0 \ \ \forall j \in \{1,..,n\}$. Allora $a_{12}\overline{x_2} = .. = a_{1n}\overline{x_n} = 0$ e, inoltre, tra $a_{11} = 0$ e $\overline{x_1} = 0$ deve valerne almeno una. Nel caso di $a_{11} = 0$ si ha: $c_1 = a_{12}\overline{x_2} + ... + a_{1n}\overline{x_n} + c_1 = \dfrac{a_{12}\overline{x_2} + .. + a_{1n}\overline{x_n} + c_1}{1 - a_{11}} = \overline{x_1}$; se $\overline{x_1} = 0$, allora, poiché $c_1 \geq 0$ e $\overline{x_1} \geq c_1$, ne segue che $\overline{x_1} = c_1$.

Ragionando allo stesso modo con le altre coordinate si ha:

$\overline{x_i} = c_i$ se e solo se $a_{ij}\overline{x_j} = 0 \ \ \forall j \in \{1,..,n\}$ o, in modo equivalente, $\overline{x_i} > c_i$ se e solo se esiste $j \in \{1,..,n\}$ tale che $a_{ij}\overline{x_j} \neq 0$.

3. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE ED ESEMPI

Osservazione 3.1

Il fatto che la soluzione $\overline{x} = (\overline{x_1},...,\overline{x_n})$ del sistema è tale che $\overline{x_i} \geq \overline{c_i} \ \ \forall \mathrm{i} \in \{1,...,\mathrm{n}\}$, dal punto di vista economico, significa che la quantità prodotta di un bene i non potrà essere inferiore a quella richiesta per il consumo.

Il contenuto economico dell'osservazione 2.1 si può riassumere come segue: Un bene i è prodotto in misura maggiore a quella richiesta per il consumo se, e solo se, esso serve per produrre qualche bene che sarà prodotto.

Osservazione 3.2

L'insieme dei beni che saranno prodotti e cioè, denotata come al solito con $\overline{x} = (\overline{x_1}, ..., \overline{x_n})$ la soluzione, l'insieme degli $i \in \{1,...,n\}$ tali che $\overline{x_i} \neq 0$ si può stabilire senza risolvere il sistema di Leontief nel seguente modo. Sia B_1 la parte di $\{1,...,n\}$ costituita dagli indici i tali che $c_i \neq 0$. Se $B_1 = \varnothing$ allora $B_1 = \varnothing$ è l'insieme dei beni che saranno prodotti. Se $B_1 \neq \varnothing$ allora consideriamo l'insieme B_2 costituito dagli indici i non appartenenti a B_1 e per i quali esiste $j \in B_1$ tali che $a_{ij} \neq 0$. Se $B_2 = \varnothing$ allora B_1 è l'insieme dei beni che saranno prodotti. Se $B_2 \neq \varnothing$ allora consideriamo l'insieme B_3 costituito dagli indici i non appartenenti a $B_1 \cup B_2$ e per i quali esiste $j \in B_2$ con $a_{ij} \neq 0$. Se $B_3 = \varnothing$ allora $B_1 \cup B_2$ è l'insieme dei beni che saranno prodotti. Se $B_3 \neq \varnothing$ si itera e poiché l'insieme $\{1,...,n\}$ è finito si può affermare che esiste un numero naturale *k* tale che $B_k = \varnothing$; l'insieme dei beni che saranno prodotti è $\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$.

L'insieme dei beni che non saranno prodotti e cioè l'insieme dei beni $i \in \{1,...,n\}$ tali che $\overline{x_i} = 0$ può essere determinato senza risolvere il sistema di Leontief nel modo seguente. Sia C_1 la parte di $\{1,...,n\}$ costituita dagli indici i tali che $c_i = 0$. Se $C_1 = \{1,...,n\}$ allora $C_1 = \{1,...,n\}$ è l'insieme dei beni che non saranno prodotti. Se $C_1 \subset \{1,...,n\}$ sia C_2 la parte di C_1 costituita dagli indici *i* tali che esiste $j \notin C_1$ tale che $a_{ij} \neq 0$. Se $C_2 = \varnothing$ allora C_1 è l'insieme cercato. Se $C_2 \neq \varnothing$ allora sia C_3 la parte di $C_1 - C_2$ costituita dagli indici *i* tali che esiste $j \notin C_1 - C_2$ tale che $a_{ij} \neq 0$. Se $C_3 \neq \varnothing$ si itera e poiché l'insieme $\{1,...,n\}$ è finito si può affermare che esiste un numero naturale *k* tale che $C_k = \varnothing$; l'insieme $C_1 - C_2 - .... - C_{k-1}$ è l'insieme dei beni che non saranno prodotti.

In altre parole si può affermare che i beni che saranno prodotti si determinano come segue tra di loro, evidentemente, vi sono quelli richiesti per i consumi; a questi vanno aggiunti quelli che servono per produrre i precedenti e così si itera fino a quando non si aggiungono più altri beni. Analogamente, per i beni che non saranno prodotti si può procedere così: evidentemente essi vanno cercati tra quelli non richiesti per i consumi; fra questi eliminiamo quelli che servono per produrre i richiesti per i consumi; proseguendo, vanno eliminati quelli che servono per produrre gli eliminati nel passo precedente e così si itera fino a quando non si eliminano più altri beni.

Concludiamo l'osservazione dimostrando che valgono le procedure esposte.

Per quanto concerne quella dell'insieme dei beni che saranno prodotti, "eventualmente cambiando i nomi alle variabili", possiamo supporre che in B_1 vi siano i beni da 1 fino ad un certo h_1 (se $B_1 = \emptyset$ si conclude banalmente che non sarà prodotto nessun bene); in B_2 quelli da $h_1 + 1$ fino ad h_2,…., in B_{k-1} quelli da $h_{k-2} + 1$ fino ad h_{k-1} e poi, fuori dell'unione $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{k-1}$, quelli (eventuali) fino a *n*.

Consideriamo un bene $i \in B_1$; si ha $\overline{x_i} \geq c_i > 0$. Sia ora $i \in B_2$ allora esiste $j \in B_1$ tale che $a_{ij} > 0$ e, quindi, poiché da $j \in B_1$ segue $\overline{x_j} > 0$, si ha $a_{ij}\overline{x_j} > 0$ e, ciò, dall'osservazione 2.1 garantisce che $\overline{x_i} > c_i \geq 0$. In modo analogo si completa la prova del fatto che se $i \in B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{k-1}$ allora $\overline{x_i} > 0$. Consideriamo ora i beni *i* fuori dell'insieme $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{k-1}$; per essi si ha $c_i = 0$ e $a_{ij} = 0$ per ogni $j \in B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{k-1}$. Se ne deduce che le (eventuali) equazioni corrispondenti (cioè le equazioni di posto successivo ad h_{k-1}) del sistema di Leontief costituiscono, a loro volta, un sistema di Leontief. A questo punto la tesi segue dal fatto che quest'ultimo sistema di Leontief è omogeneo e quindi ha solo la soluzione con tutte le coordinate nulle. La prova, invece, della validità del procedimento esposto per individuare i beni che non saranno prodotti si ottiene, tenendo conto di quanto appena dimostrato per i beni che saranno prodotti, notando le seguenti uguaglianze insiemistiche:

$C_1 = \{1,...,n\} - B_1$ e $C_i = B_i$ per ogni $i \in \{2,...,n\}$. Infatti, dopo ciò, si ha:

$\{1,...,n\} - (B_1 \cup ... \cup B_{k-1}) = C_1 - C_2 - ... - C_{k-1}$ (basta usare le definizioni di operazione tra insiemi che figurano nell'uguaglianza).

Esempio 3.1

Sia $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$ la matrice tecnologica e $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ il vettore delle quantità dei beni destinate al consumo.

Si ha: $B_1 = \{1,2,4\}$, $B_2 = \{3\}$ dunque $B_3 = \emptyset$ e quindi $B_1 \cup B_2 = \{1,2,3,4\}$ sarà l'insieme dei beni che saranno prodotti, cioè tutti. Verifichiamo che l'insieme dei beni che non saranno prodotti è vuoto. Infatti $C_1 = \{3\}$, $C_2 = C_1$, dunque $C_3 = C_1 - C_2 = \emptyset$ e quindi l'insieme dei beni che non saranno prodotti è $C_1 - C_2 = \emptyset$.

Più velocemente l'unico bene che potrebbe non essere prodotto, tenuto conto che $\overline{x_i} \geq \overline{c_i}$ $\forall i \in \{1,...,n\}$, è il terzo poiché $c_3 = 0$, ma esso sarà prodotto perché serve a produrre beni richiesti per i consumi.

Esempio 3.2

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Si ha: $B_1 = \{1,2,4\}$, $B_2 = \emptyset$, dunque l'insieme dei beni che saranno prodotti è $B_1 = \{1,2,4\}$. Verifichiamo che l'insieme di quelli che non saranno prodotti è $C_1 = \{3\}$, infatti $C_1 = \{3\}$ e $C_2 = \emptyset$.

Anche in questo esempio l'unico bene che potrebbe non essere prodotto è il terzo e in effetti non sarà prodotto sia perché non richiesto dal mercato sia perché non serve a produrre gli altri (gli elementi della terza riga, escluso a_{33}, sono tutti nulli).

Esempio 3.3

Sia $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$ e $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Si ha: $B_1 = \{2,4,5\}$, $B_2 = \{3\}$, $B_3 = \{1\}$ e, poiché $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \{1,2,3,4,5\}$, ne segue che tutti i beni saranno prodotti. Riguardo quelli che non saranno prodotti si ha: $C_1 = \{1,3\}$, $C_2 = \{3\}$, $C_3 = \{1\}$, $C_4 = \varnothing$, dunque l'insieme di quelli che non saranno prodotti è $C_1 - C_2 - C_3 = \varnothing$.

Ragionando come negli esempi precedenti si ha che anche se il primo e il terzo bene non sono richiesti dal mercato, saranno prodotti perché il terzo serve a produrre gli altri che sono prodotti e il primo a produrre il terzo.

BIBLIOGRAFIA

[1] CASTAGNOLI E., PECCATI L., *Matematica per l'Analisi economica*, Ed. Etas libri, 1979.

[2] CHIANG A.C., *Introduzione all'economia matematica*, Ed. Bollati Boringhieri, 1978.

[3] GIORGI G., *Elementi di Algebra lineare*, Ed. Giappichelli, 1998.

[4] GUERREGGIO A. *Matematica*, Ed. Bruno Mondadori, 2004.

[5] PECCATI L., SALSA S., SQUILLATI A., *Matematica per l'Economia e l'Azienda*, Ed. Egea, 2001.

[6] SCAGLIANTI L., TORRIERO A., *Matematica, metodi e applicazioni*, Ed. Cedam, 2002.

[7] SIMON C.P., BLUME L.E. *Matematica 1 per l'economia e le scienze sociali*, Ed. Università Bocconi, 2002.