

Il sottoscritto dichiara ai sensi dell'art. 47 del D.P.R. 28/12/2000, n.445 che la seguente copia è conforme all'originale pubblicato sul periodico della Mathesis, Anno CXXIII serie XI- volume 5, Numero 2, maggio-agosto 2013

## TEOREMI INGANNEVOLI

**SUNTO:** Partendo da un grave errore presente in un testo di geometria per studenti di scuole superiori e dopo aver notato che errori analoghi si trovano anche in qualche testo universitario, abbiamo scritto questo breve lavoro allo scopo di invitare i colleghi a far riflettere maggiormente i propri studenti sull'implicazione  $A \Rightarrow B$  e sul ruolo dell'ipotesi, della tesi e della dimostrazione in un teorema.

**Abstract:** We have decided to write this short paper when we found a serious mistake in a text of geometry for high school students, and when we met similar mistakes in some texts for university students.

The paper has the aim to invite our colleagues to have their students mainly concentrated on the implication  $A \Rightarrow B$  and on the role of the hypothesis, of the thesis and of the demonstration in a theorem.

**Parole chiave:** Ipotesi, tesi.

### 1.INTRODUZIONE

In questo breve lavoro vogliamo fare qualche considerazione sull'implicazione  $A \Rightarrow B$  evidenziando come, molto spesso, gli studenti ( e purtroppo non solo loro) commettano degli errori e sul fatto che alcuni testi, anche universitari, dopo la dimostrazione di un teorema concludono che “ allora la tesi è vera”, invece di dire “ il teorema è dimostrato”.

Ritornando ad  $A \Rightarrow B$ , ci chiediamo, una volta dimostrata l'implicazione, cosa possiamo dire di B, se:

A è vera?

A è falsa?

E' noto, fortunatamente, anche tra gli studenti, che se A è vera allora lo è anche B. Ma se A è falsa molti studenti ritengono che anche B sia falsa. Quante volte ci è capitato di sentire che poiché se F è derivabile allora F è continua, dunque se F non è derivabile allora non è continua. Per convincere gli allievi che se A è falsa allora niente si può dire di B è opportuno proporre esempi semplici del tipo: Prop. A:  $x$  è maggiore di 3. Prop. B:  $x$  è maggiore di 2. Si ha

$A \Rightarrow B$ , ma per  $x=2.9$   $A$  è falsa mentre  $B$  è vera, mentre per  $x=1$  sono false entrambe. Questo tipo di errore non solo è molto frequente tra gli allievi, ma, addirittura, l'abbiamo incontrato anche in un libro di geometria per il biennio, pubblicato da un'importante casa editrice. In questo testo gli autori, dopo aver dimostrato che se due rette formano angoli alterni interni uguali allora le rette sono parallele e ricavato da questa dimostrazione i corollari relativi alle altre coppie di angoli, dimostrano (anzi è opportuno dire ritengono di aver dimostrato) un'altra proposizione affermando che "se i coniugati non sono supplementari allora le rette non sono parallele". La loro proposizione è ovviamente vera ma non è conseguenza di quanto avevano dimostrato precedentemente, cioè essi concludono che poiché  $A \Rightarrow B$  allora  $\neg A \Rightarrow \neg B$ .

L'altra questione che vogliamo trattare, come accennato, è la confusione che spesso si nota su alcuni testi, anche universitari, tra la dimostrazione di un teorema e il fatto che la tesi sia vera.

Questo tipo di errore è più frequente quando l'ipotesi

$A$  è costituita da più proposizioni  $H_1, H_2, \dots, H_n$  e si effettua una dimostrazione per assurdo.

E' ben noto che la dimostrazione per assurdo, una volta effettuata correttamente, mostra che, detta  $B$  la tesi, l'insieme di proposizioni  $\{H_1, H_2, \dots, H_n, \neg B\}$  non è compatibile, ma se non ci si è accertati della compatibilità dell'insieme  $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ , allora è vero che  $\{H_1, H_2, \dots, H_n\} \Rightarrow B$ , ma ciò non esclude che  $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$  implichi  $\neg B$ .

## 2. TEOREMI INGANNEVOLI

Suggeriamo di trattare in classe gli esempi che seguono (ovviamente non presenti su testi), che ci piace chiamare "Teoremi ingannevoli", o altri analoghi, al fine di far riflettere spesso gli studenti sulla differenza tra la dimostrazione di un teorema e il fatto che tesi sia vera.

**Esempio (1)**

$$A = \begin{cases} H_1 : f \text{ è derivabile in } [a; b] \\ H_2 : f'(a) < 0, f'(b) > 0 \\ H_3 : f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a; b[ \end{cases}$$

$$B = \{ \exists x_0 \text{ tale che } f' \text{ non è continua in } x_0 \}$$

**Dimostrazione**

**Mostriamo, procedendo per assurdo, che  $\{H_1, H_2, H_3, \neg B\}$  non sono compatibili. Se  $f'$  fosse continua, allora per il teorema degli zeri, avremmo che esiste  $\bar{x}$  tale che  $f'(\bar{x}) = 0$ , contro la H3**

**E' corretto a questo punto concludere che il teorema è dimostrato, ma è errato dire che è vera B, perché non abbiamo verificato che A è vera. Anzi A è falsa per il teorema di Darboux e dunque B può essere falsa.**

### Esempio (2)

**Ricordiamo che  $x_0$  è di accumulazione per X se e solo se, indicato con  $I(x_0)$  un intorno di  $x_0$ ,  $\forall I(x_0), (I(x_0) - \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset$ .**

$$A = \begin{cases} H_1 : x_0 \text{ è di accumulazione per } X \\ H_2 : \exists I(x_0) \text{ avente un numero finito di punti in comune con } X \end{cases}$$

**B = Esiste un numero finito di intorni di  $x_0$  la cui intersezione non è un intorno di  $x_0$**

### Dimostrazione

**Mostriamo, procedendo per assurdo, che  $\{H_1, H_2, \neg B\}$  non sono compatibili. Supponiamo quindi che comunque prendiamo un numero finito di intorni di  $x_0$  la loro intersezione è un intorno di  $x_0$ .**

**Da  $H_2$  esiste  $I(x_0)$  tale che  $(I(x_0) - \{x_0\}) \cap X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Sia  $I_1(x_0)$  un intorno di  $x_0$  a cui non appartiene  $x_1, \dots, I_n(x_0)$  un intorno di  $x_0$  a cui non appartiene  $x_n$ . Per l'ipotesi assurda  $I \cap I_1 \cap \dots \cap I_n$  è un intorno di  $x_0$ , ma  $I \cap I_1 \cap \dots \cap I_n \cap (X - \{x_0\}) = \emptyset$ , in contraddizione con  $H_1$ .**

**Dunque il teorema è dimostrato, ma B è falsa e ciò non è una contraddizione poiché A è falsa.**

### Esempio (3)

$$A = \begin{cases} H_1 : p \text{ è un numero primo} \\ H_2 : \exists x \text{ tale che } x^p - x \text{ non è divisibile per } p \end{cases}$$

B = Esiste un  $x$  che non è un divisore né un multiplo di  $p$  tale che  $x^p - x$  non è divisibile per  $p$ .

### Dimostrazione

**Mostriamo, procedendo per assurdo, che  $\{H_1, H_2, \neg B\}$  non sono compatibili. Sia  $x$  un divisore di  $p$ . Poiché  $p$  è primo allora,  $x=p$  oppure  $x=1$  ma ciò è assurdo perché, in tal caso,  $x^p - x$  è divisibile per  $p$ . Analogamente si ragiona se  $x$  è un multiplo di  $p$ .**

**Dunque il teorema è dimostrato, ma è errato dire che B è vera poiché A è falsa. Infatti, dal teorema di Fermat, si ha che se  $p$  è primo allora, qualunque sia  $x$ ,  $x^p - x$  è divisibile per  $p$ .**

### Esempio (4)

**Sia S un insieme con cardinalità  $n \geq 1$ .**

$$A = \begin{cases} H_1 : f \text{ è una funzione da } P(S) \text{ in } S \\ H_2 : f \text{ è iniettiva} \end{cases}$$

B =  $f$  è invertibile

### Dimostrazione

**Mostriamo, procedendo per assurdo, che  $\{H_1, H_2, \neg B\}$  non sono compatibili. Supponiamo, quindi, che  $f$  non sia invertibile. Per  $H_2$  ne segue che  $f$  non è suriettiva quindi  $\exists \bar{x} \in S$  tale che non è immagine di nessun elemento di  $P(S)$ . Supponiamo, per fissare le idee, che esso sia  $x_n$ . In  $P(S)$  ci sono i singleton  $\{x_1\}, \dots, \{x_n\}$ , a  $\{x_1\}$  sarà associato un elemento di  $S$  supponiamo, per fissare le idee, che sia  $x_1$ , a  $\{x_2\}$  sarà associato un**

elemento di S, diverso da  $x_1$ , supponiamo che sia  $x_2$ , e così via fino a  $\{x_{n-1}\}$ , ma a  $\{x_n\}$ , per  $H_2$ , non sarebbe associato nessun elemento di S e ciò è assurdo.

Dunque il teorema è dimostrato, ma è errato affermare che B è vera perché A è falsa.

Nell'esempio che segue si suppone che, quando è proposto, gli allievi conoscano le coniche non come luogo di punti che con le loro coordinate soddisfano un'equazione di secondo grado in due incognite e sappiano che l'equazione della parabola con l'asse di simmetria coincidente con quello delle ordinate è del tipo  $y = kx^2 + h$ . Quest'ipotesi è ragionevole per allievi del terzo anno quando ancora non si è ancora trattata la classificazione delle coniche.

#### Esempio (5)

Sia  $\Gamma$  il sottoinsieme del piano tale che:

$$A = \begin{cases} H_1 : \Gamma \text{ è una conica non degenera} \\ H_2 : \Gamma \text{ è il luogo dei punti che soddisfano l'equazione } y = ax^4 + b \end{cases}$$

$B = \Gamma$  è una parabola.

#### Dimostrazione

Mostriamo, procedendo per assurdo, che  $\{H_1, H_2, \neg B\}$  non sono compatibili. Quindi  $\Gamma$  è un'ellisse o un'iperbole. Facciamo vedere che ciò non è possibile perché non ha centro di simmetria. Infatti se  $C(x_0; y_0)$  fosse il centro allora presi  $P(1; a+b)$  e  $Q(-1; a+b)$  punti di  $\Gamma$  i loro simmetrici rispetto a C, che sono rispettivamente  $R(2x_0 - 1; 2y_0 - a - b)$  e  $S(2x_0 + 1; 2y_0 - a - b)$ ,

dovrebbero appartenere a  $\Gamma$ . Sostituendo nell'equazione si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2y_0 - a - b = a(2x_0 - 1)^4 + b \\ 2y_0 - a - b = a(2x_0 + 1)^4 + b \end{cases}, \text{ sottraendo dalla prima la seconda si ha } a=0, \text{ che non è accettabile per } H_1,$$

oppure  $x_0 = 0$ , da cui si ha  $y_0 = a + b$ . Quindi il centro dovrebbe essere  $C(0; a + b)$ . Preso il punto  $T(0; b)$  di  $\Gamma$ , il simmetrico di T rispetto a C non appartiene, però, a  $\Gamma$ , dunque la conica non ha centro e quindi è una parabola.

Dunque il teorema è dimostrato, ma è errato concludere che B è vera poiché A è falsa. Infatti essendo  $y = ax^4 + b$  una funzione pari l'asse di simmetria della parabola dovrebbe essere l'asse y e quindi la sua equazione essere del tipo  $y = kx^2 + h$  (con k non nullo) e ciò è assurdo per il principio di identità dei polinomi.

**Roberto Raucci, Università degli Studi di Salerno,  
Facoltà di Scienze Economiche, via Ponte Don Melillo  
84084, Fisciano (Sa) rraucci@unisa.it**

**Luigi Taddeo, Scuola Militare Nunziatella-Napoli  
via G. Parisi 16, 80132 Napoli  
luigi.taddeo@alice.it**