Il sottoscritto dichiara ai sensi dell'art. 47 del D.P.R. 28/12/2000, n.445 che la seguente copia è conforme all'originale w.p. 3.119 del DISES dell'Univ. di Salerno, gennaio 2002.

INSIEMI DEBOLMENTE CONVESSI E CONCAVITA' GENERALE

(1) ROBERTO RAUCCI

(2) LUIGI TADDEO

(1) Dipartimento di Scienze Economiche, Università di Salerno, via Ponte Don Melillo,84084,Fisciano, (SA)

E-mail: **rraucci@diima.unisa.it**

(2) Liceo Scientifico "L. Garofano" ,via Napoli n.1, 81040, Capua (Ce)

E-mail: luitad@tin.it

1.**INTRODUZIONE**

Sia n un numero naturale, X un sottoinsieme di $\Re^n$ e f una funzione definita in X e a valori in $\Re$.

In questo lavoro considereremo il seguente problema:

(P) $\max_{x\in X} \; f(x)$.

Sono ben note le condizioni sulla funzione f che, insieme con l'ipotesi di convessità di X , sono sufficienti per garantire che l'insieme delle soluzioni del problema (P), se non è vuoto, è costituito da un sol punto. Più precisamente, in [ ] si richiedeva la stretta concavità di *f*, in [CA] si indeboliva l'ipotesi su *f* richiedendo che essa fosse *strettamente quasi concava in senso esteso*, in

[RA-TA] si indeboliva ulteriormente l'ipotesi su f richiedendo che essa fosse *debolmente strettamente quasi concava in senso esteso*.

In questo lavoro indeboliamo sia l'ipotesi di convessità di *X*, sia che *f* sia *debolmente strettamente quasi concava in senso esteso*.

Nel paragrafo 2 richiamiamo le definizioni e i risultati suddetti già noti in letteratura. Introduciamo e studiamo l'ipotesi su X e l'ipotesi su f rispettivamente nei paragrafi 3 e 4. Infine, nel paragrafo 5, dimostriamo il risultato di unicità.

2. PRELIMINARI

Per ogni $h \in \Re$ poniamo $S_h = \{x \in X \text{ tali che } f(x) = h\}$ e $T_h = \{x \in X \text{ tali che } f(x) > h\}$ e per

ogni $x_1, x_2 \in X$ poniamo $s(x_1 x_2) = \{x \in X \text{ tali che esiste } t \in \,]0;1[\, : x = tx_1 + (1-t)x_2\}$.

Richiamiamo le nozioni di concavità generalizzata già introdotte rispettivamente in [CA] e in

[RA-TA].

Definizione 2.1

La funzione f è *strettamente quasi concava in senso esteso* se e solo se

$$x_1, x_2 \in S_h\,,\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow s(x_1 x_2) \subseteq T_h \tag{2.1}$$

Definizione 2.2

La funzione f è *debolmente strettamente quasi concava in senso esteso* se e solo se

$$x_1, x_2 \in S_h\,,\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow s(x_1 x_2) \subseteq \overline{T_h} \tag{2.2}$$

Adesso richiamiamo i risultati di unicità della soluzione del problema (P) già introdotti, rispettivamente, in [CA] e in [RA-TA].

Proposizione 2.1

Se il problema (P) ammette soluzioni, se X è un convesso e se f è *strettamente quasi concava in senso esteso*, allora il problema (P) ammette unica soluzione.

Proposizione 2.2

Se il problema (P) ammette soluzioni, se X è un convesso e se f è *debolmente strettamente quasi concava in senso esteso*, allora il problema (P) ammette unica soluzione.

Osservazione 2.1

Come già osservato in [RA-TA], ogni volta che è applicabile la prop.2.1 lo è anche la prop.2.2; invece vi sono situazioni in cui la prop.2.2 è applicabile mentre la prop.2.1 no.

3. INSIEMI DEBOLMENTE CONVESSI

In questo paragrafo introduciamo una nozione che generalizza quella di insieme convesso.

Definizione 3.1

X è un insieme *debolmente convesso* se e solo se

$$x_1, x_2 \in X \,,\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow s(x_1 x_2) \cap X \neq \varnothing \,. \qquad (3.1)$$

E' immediato provare le seguenti proprietà degli insiemi debolmente convessi.

Proposizione 3.1

i_1) Se X è convesso allora X è debolmente convesso;

i_2) Se X è convesso e Y è debolmente convesso allora $X \cap Y$ è debolmente convesso;

i_3) Se X è finito ed è debolmente convesso allora la cardinalità di X non supera 1.

Osservazione 3.1

Circa la i_2) si ha che esistono coppie di insiemi debolmente convessi la cui intersezione non è debolmente convessa (ad esempio Q e $(\Re / Q) \cup \{0,1\}$).

Su i_1) si può affermare che esistono insiemi debolmente convessi ma non convessi (ad esempio Q); ma i_1) è invertibile se si aggiunge l'ipotesi che X è chiuso, come si desume dalla seguente proposizione:

Proposizione 3.2

Se X è chiuso e debolmente convesso allora X è convesso.

Dimostrazione

Supponiamo, per assurdo, che esistono $x_1, x_2 \in X$ tali che $Y = \{t \in [0;1] : tx_1 + (1-t)x_2\} \subset [0;1]$.

Sia $\bar{t} \in [0;1]/Y$. Poiché X è chiuso esiste un intervallo aperto passante per $\bar{t}$ e contenuto in $[0;1]/Y$.

Dunque è non vuoto l'insieme degli intervalli aperti aventi estremo sinistro minore di $\bar{t}$, estremo destro maggiore di $\bar{t}$ e contenuti in $[0;1]/Y$. Siano m e M, rispettivamente, l'estremo inferiore degli estremi sinistri e l'estremo superiore degli estremi destri così che $[m;M] \cap Y = \emptyset$.

Ciò, tenuto conto del fatto che X è chiuso e quindi m,M$\in Y$, contraddice l'ipotesi di debole convessità di *X*.

Proviamo ora queste altre proprietà degli insiemi debolmente convessi.

Proposizione 3.3

$i_1)$ Se *X*/*intX* ha cardinalità non superiore a 1 (in particolare se è aperto) allora *X* è debolmente convesso;

$i_2)$ X è debolmente convesso se e solo se

$$x_1, x_2 \in X \cap FrX \text{ , } x_1 \neq x_2 \Rightarrow s(x_1 x_2) \cap X \neq \varnothing; \qquad (3.2)$$

$i_3)$ Se X è debolmente convesso e se E è finito allora *X*/*E* è debolmente convesso.

Dimostrazione

$i_1)$ Siano $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$. Allora almeno uno dei due, per esempio x_1, è interno a *X*.

Posto $z_t = tx_2 + (1-t)x_1,$ si ha $\lim\limits_{t \to 0} z_t = x_1$, da cui l'asserto.

$i_2)$ nell'ipotesi (3.2), presi $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, se $x_1, x_2 \in FrX$ si ha subito la tesi; altrimenti si procede come in $i_1)$. L'altra implicazione è ovvia.

$i_3)$ ovviamente basta dimostrare che $X/\{P\}$ è debolmente convesso qualunque sia il punto *P*. Se $X/\{P\}$ non fosse debolmente convesso allora esisterebbero $x_1, x_2 \in X$ tali che $s(x_1 x_2) \cap X = \{P\}$ e quindi $s(x_1 P) \cap X = \varnothing$ contro il fatto che X è debolmente convesso.

Osservazione 3.2

L’insieme $]0;1[\cup[2;3]$ prova che esistono insiemi X debolmente convessi e tali che la cardinalità di $X/intX$ supera 1.

Da $i_3)$ della prop. 3.2 si deduce che X è debolmente convesso se e solo se esiste (e, ovviamente, coincide con X) il più piccolo insieme debolmente convesso contenente X .

Prima di studiare altre proprietà degli insiemi debolmente convessi introduciamo le seguenti definizioini:

Definizione 3.2

Sia B una parte di $\Re$

x_0 è un *viceminimo* di B se e solo se esiste un punto x_1 tale che $x_0 = \min(B/\{x_1\})$;

Definizione 3.3

Sia B una parte di $\Re$

x_0 è un *quasiminimo* di B se e solo se esiste un insieme finito E tale che $x_0 = \min(B/E)$;

Sia s una qualunque semiretta in $\Re^n$, detta P_0 la sua origine, definiamo l’applicazione:

$\Phi_s : P \in X \cap s \to \|P - P_0\|$

Ora si ha:

Proposizione 3.4

$i_1)$ Se X è debolmente convesso allora per ogni semiretta s in $\Re^n$, il condominio dell’applicazione Φ_s (denotato con $C(\Phi_s)$) è privo di quasiminimo;

$i_2)$ se per ogni semiretta s in $\Re^n$ il condominio dell'applicazione Φ_s è privo di viceminimo allora X è debolmente convesso.

Dimostrazione

$i_1)$ Supponiamo, per assurdo, che esiste una semiretta s in $\Re^n$ di origine P_0 e un numero q che risulti quasiminimo di $C(\Phi_s)$. Allora, detto E un insieme finito tale che $C(\Phi_s)/E$ ha per minimo q e posto $r = \max(E \cap \left]-\infty;q\right[)$ si ha che tra r e q non vi sono punti di $C(\Phi_s)$. Detti R e Q punti di $X \cap s$ tali che $\Phi_s(R) = r$ e $\Phi_s(Q) = q$, poiché X è debolmente convesso, esiste un punto T del segmento $s(RQ)$ in X. Ne segue che esiste $t \in \left]0;1\right[$ tale che $T - P_0 = t(R - P_0) + (1-t)(Q - P_0)$ da cui $\|T - P_0\| \in \left]\|R - P_0\|;\|Q - P_0\|\right[$ e ciò è assurdo.

$i_2)$ Supponiamo, per assurdo, che esistono $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ tali che $s(x_1x_2) \cap X = \varnothing$. Sia s la semiretta di origine x_1 e passante per x_2. Dall'ipotesi si ha che esiste $y \in s \cap X$ tale che $\|y - x_1\| \in \left]0;\|x_1 - x_2\|\right[$ da cui $y \in s(x_1x_2)$ e ciò è assurdo.

Osservazione 3.3

Da quest'ultima proposizione segue facilmente che sono equivalenti:

$i_1)$ X è debolmente convesso:

$i_2)$ per ogni semiretta s in $\Re^n$ il condominio dell'applicazione Φ_s è privo di viceminimo;

$i_3)$ per ogni semiretta s in $\Re^n$ il condominio dell'applicazione Φ_s è privo di quasiminimo;

4.FUNZIONI STRETTAMENTE CONCAVE IN SENSO GENERALE

Sia $\Omega = \{F : P(X) \to P(X) \ \ \text{tali che } F(\varnothing) = \varnothing\}$.

Definizione 4.1

Siano X debolmente convesso, $f : X \to \Re$, $F \in \Omega$,

f è F- *strettamente concava* se e solo se $x_1, x_2 \in S_h$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow s(x_1 x_2) \cap F(T_h) \neq \varnothing$. (4.1)

Definizione 4.2

f è *strettamente concava in senso generale* se e solo se esiste $F \in \Omega$ tale che f è F-strettamente concava.

Osservazione 4.1

E' evidente che, posto per ogni $A \subseteq X$, $F_1(A) = A$, $F_2(A) = \overline{A}$, si ha che f è F_1-strettamente concava implica f è F_2-strettamente concava e che f è strettamente quasi concava in senso esteso implica f è F_1-strettamente concava e f debolmente strettamente quasi concava in senso esteso implica f è F_2-strettamente concava.

ESEMPIO 4.1

Sia $D = \Re^2 / \left\{ (0;1), (0;-1), (\frac{1}{n}; n), (\frac{1}{n}; -n) : n \in N \right\}$ e sia g una funzione biettiva da

D in $\left]-\infty; 0\right[$. Consideriamo la funzione $f : \Re^2 \to \Re$ definita da

$$f(x;y) = \begin{cases} g(x;y) \text{ se } (x;y) \in D \\ 0 \text{ se } (x;y) \in \{(0;1), (0;-1\} \\ n \text{ se } (x;y) \in \left\{ (\frac{1}{n}; n) / n \in N \right\} \\ n + \frac{1}{2} \text{ se } (x;y) \in \left\{ (\frac{1}{n}; -n) / n \in N \right\} \end{cases}$$

Rispetto a tale funzione *f*, posto $h=0$, $P_1 = (0;1), P_2 = (0;-1)$, si ha

$P_1, P_2 \in S_h, s(P_1P_2) \cap \overline{T_h} = \emptyset$

(anzi, addirittura, $s(P_1P_2) \cap co\overline{T_h} = \emptyset$), $s(P_1P_2) \cap \overline{coT_h} \neq \emptyset$.

E' ora facile concludere che la funzione f è strettamente concava in senso generale ma non è debolmente strettamente quasi concava in senso esteso.

5. Il RISULTATO DI UNICITA'

Proviamo subito il risultato di unicità della soluzione del problema (P) di cui abbiamo già accennato nell'introduzione.

Proposizione 5.1

Se il problema (P) ammette soluzioni e se X è debolmente convesso si ha:

f è strettamente concava in senso generale se e solo se il problema (P) ammette unica soluzione.

Dimostrazione

Supponiamo che esiste $F \in \Omega$ tale che f è F- strettamente concava. Supponiamo, inoltre, per assurdo, che x_1 e x_2 siano soluzioni distinte del problema (P). Allora esiste $y \in s(x_1 x_2) \cap F(T_{f(x_1)})$ da cui, poiché $F \in \Omega$, $f(y) > f(x_1)$ e ciò è assurdo.

Inversamente supponiamo che il problema (P) ammetta unica soluzione. Siano $x_1, x_2 \in S_h$, $x_1 \neq x_2$ allora $T_h \neq \varnothing$. Posto, per ogni $A \in P(X)/\{0\}$, $F(A) = X$ e $F(\varnothing) = \varnothing$, risulta $F(T_h) = \mathrm{X}$ e quindi, poiché X è debolmente convesso, si ha $s(x_1 x_2) \cap F(T_h) \neq \varnothing$.

Osservazione 5.1

La proposizione 5.1 rappresenta, rispetto all'unicità, ciò che il teorema di Weierstrass rappresenta rispetto all'esistenza nel senso seguente:

Così come l'esistenza della soluzione del problema (P) equivale all'esistenza di una topologia rispetto alla quale la funzione f risulta s.c.i. e l'insieme X compatto, l'unicità della soluzione del problema (P) (supposto che esistono le soluzioni e che X sia debolmente convesso) equivale all'esistenza di un $F \in \Omega$ e f rispetto al quale la funzione risulti strettamente concava.