Funzioni g - continue e funzioni g - derivabili

Sunto: Si definiscono dei nuovi concetti di continuità e di derivabilità, si confrontano con quelli classici e si mostra un'applicazione a problemi di minimo e massimo.

Abstract: In this paper we introduce new definitions of continuous functions and differentiable functions which generalize the usual notions. Moreover we use this concepts in optimization problems.

Parole chiave: Continuità, derivabilità.

1.Introduzione

In questo breve lavoro abbiamo dato delle nuove definizioni di continuità e di derivabilità, più generali di quelle classiche. Il modo in cui sono state date queste nuove definizioni non è l'unico (vedi osservazione 3). Abbiamo mostrato alcune proprietà e un'applicazione di questo nuovo concetto di derivata che "migliora" il metodo delle derivate successive per il calcolo degli estremi relativi (vedi osservazione 4) . Queste nuove definizioni, con le relative proprietà e applicazioni, possono essere presentate, per esempio, a studenti di un quinto liceo scientifico, sia allo scopo di mostrare come si possono generalizzare concetti noti sia per affrontare più facilmente una certa categoria di esercizi. Allo scopo di stimolare gli allievi più motivati, nell'ultima parte di questo lavoro, sono state elencate volutamente alcune questioni aperte, risolvibili con strumenti di analisi elementare. Infine abbiamo indicato, a coloro che trovassero stimolante il lavoro, delle possibili generalizzazioni agli spazi n-dimensionali che potrebbero portare ad altre utili applicazioni.

2. Definizioni e proprietà

Indichiamo con G l'insieme delle funzioni g definite in un intorno I_g di 0, privato al più del punto 0 ed ivi infinitesime.

Def.(1): Sia $f : X \subseteq \Re \to \Re, x_0 \in X, g \in G$, diremo che f è g-continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x - x_0)} \cdot (x - x_0) = 0.$

Es.(1):

$f(x) = senx \quad g(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$. f è g-continua in 0 infatti $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x - x_0)} \cdot (x - x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} \cdot x = 0.$

Es.(2):

$f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad x_0 = 1$. f non è g-continua in 1 infatti $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x - x_0)} \cdot (x - x_0) = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x-1)^2} \cdot (x - 1) = 1.$

Def.(2): Sia $f : X \subseteq \Re \to \Re, x_0 \in X, g \in G,$ diremo che f è g-derivabile in x_0 se e solo se esiste ed è finito il $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x - x_0)}$. Tale limite lo indicheremo con $f_g^{'}(x_0)$ e diremo che esso è la derivata di f rispetto a g in x_0.

Es.(3):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x \text{ se } x \geq 0 \\ x \text{ se } x < 0 \end{cases}, g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 0.$$

Si ha $f_g^{'}(0) = 0.$

Es.(4):
$f(x) = x, \quad g(x) = x^2, \quad x_0 = 0$. f non è g-derivabile in 0.

Osservazione (1):
Se f è g-derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 nel senso classico, infatti poiché $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x - x_0)}$ esiste ed è finito e poiché la funzione g appartiene a G allora $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$.
Se *f* è *g*-derivabile non implica che *f* è derivabile nel senso classico, come si deduce dall'esempio 3.
Se *f* è *g*-continua in x_0 allora non è detto che *f* sia continua in x_0 nel senso classico, infatti basta considerare $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in Q \\ -1 \text{ se } x \in \Re - Q \end{cases}$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad x_0 = 0$.

Osservazione (2):
Se $g(x) = x$ le definizioni di *g*- continuità e di *g*-derivabilità coincidono con le definizioni classiche di continuità e derivabilità.

Osservazione (3):
E' chiaro che le definizioni introdotte di continuità e derivabilità non rappresentano l'unico modo per generalizzare quelle classiche, ma, per esempio,

avremmo potuto scegliere le funzioni g tali che $\lim_{x \to x_0} g(x) - g(x_0) = 0$ e quindi continue in x_0.
Avremmo così definito:

Def.($1'$ **):** Sia $f : X \subseteq \Re \to \Re, x_0 \in X$, g continua in x_0**,** diremo che f è g-continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot (x - x_0) = 0.$

Def.($2'$ **):** Sia $f : X \subseteq \Re \to \Re, x_0 \in X$, g continua in x_0**,** diremo che f è g-derivabile in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$ esiste ed è finito.
Notiamo, inoltre, che per ogni $g \in G$ si può costruire una funzione h continua in x_0 e tale che $g(x - x_0) = h(x) - h(x_0)$ e viceversa. Infatti presa $g \in G$ definiamo $h(x) = \begin{cases} g(x - x_0) \text{ se } x \neq x_0 \\ 0 \text{ se } x = x_0 \end{cases}$ e viceversa, se h è continua in x_0, $g(x) = h(x + x_0) - h(x_0) \in G$**.** Ritornando alle def.(1) e (2), si ha:

Prop.(1)
Se f è g-derivabile in x_0 allora f è g-continua in x_0**.**
Dim.
Ovvia

Il viceversa non vale, come mostra il seguente esempio:

$f(x) = senx, \quad g(x) = \sqrt[3]{x^4}, \quad x_0 = 0$.

Prop.(2)

a) Se f e l sono g-continue in x_0 allora $f \pm l$ è g-continua in x_0.

b) Se f e l sono g-derivabili in x_0 allora $f \pm l$ è g-derivabile in x_0 e $(f \pm l)'_g(x_0) = f'_g(x_0) \pm l'_g(x_0)$

c) Se f e l sono g-derivabili in x_0 allora $f \cdot l$ è g-derivabile in x_0 e $(fl)'_g(x_0) = f'_g(x_0)l(x_0) + f(x_0)l'_g(x_0)$

Dim.

a) Dalla definizione segue che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \pm l(x) - f(x_0) \mp l(x_0)}{g(x - x_0)} \cdot (x - x_0) = 0.$$

b) Analoga alla precedente.

c)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)l(x) - f(x_0)l(x_0)}{g(x - x_0)} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)l(x) - f(x_0)l(x) + f(x_0)l(x) - f(x_0)l(x_0)}{g(x - x_0)}$$

e tenuto conto dell'ipotesi e dell'osservazione 1 si ottiene la tesi.

Diversamente dal caso classico si ha:

a) Se f e l sono g-continue in x_0 ciò non implica che $f \cdot l$ sia g-continua in x_0. Infatti:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \sqrt[3]{x},$$

f è g-continua in 0, ma, posto $f(x) = l(x)$, $f \cdot l$ non è g-continua in 0.

3. Un'applicazione

Sia

$G^{+} = \{g \in G \text{ tali che g è positiva in un intorno di 0, privato, al più, del punto } 0\}$

, si ha:

Teorema (1)

Sia f una funzione definita in un intorno J di x_0 e continua in x_0; allora:

x_0 è punto di minimo relativo proprio per f se e solo se $\exists\, g \in G^{+}$ tale che $f_g^{'}(x_0) > 0$.

Dim.

Se x_0 è un punto di minimo relativo proprio per f allora esiste un I intorno di x_0 tale che

$f(x) - f(x_0) > 0 \ \forall x \in I - \{x_0\}$. Posto $g(x - x_0) = f(x) - f(x_0) \ \forall x \in I - \{x_0\}$, si ha che $g \in G^+$ e $f_g^{'}(x_0) = 1 > 0$ e quindi la tesi.

Viceversa se esiste $g \in G^+$ tale che $f_g^{'}(x_0) > 0$ esisterà un intorno di x_0 tale che $f(x) - f(x_0) > 0 \ \forall x \in I - \{x_0\}$ e quindi x_0 è un punto di minimo relativo proprio per *f*.

Osservazione (4)
Questo teorema rappresenta una generalizzazione ed una "semplificazione" del metodo delle derivate successive, come mostrano i tre esempi che seguono. Infatti se x_0 è punto di minimo relativo proprio per *f* e se è applicabile il metodo delle derivate successive, allora la prima derivata che non si annulla in x_0 è di ordine *n*, con *n* pari, ma allora, posto $g(x - x_0) = (x - x_0)^n \in G^+$, si ha $f_g^{'}(x_0) > 0$. Per il calcolo di $f_g^{'}(x_0)$, grazie a qualche sostituzione e/o dei limiti notevoli, può non essere necessario calcolare le derivate di *f* fino all'ordine *n*. Inoltre è possibile trovare situazioni in cui il metodo delle derivate successive non è applicabile, mentre risulta abbastanza semplice utilizzare il teorema (1).

Applicazioni:

Es.(5):
Mostriamo che 0 è punto di minimo relativo proprio per $f(x) = e^{x^2} - 1 - senx^2$. Prendiamo la funzione $g(x) = x^4 \in G^+$. Per il calcolo di $f_g^{'}(0)$ dobbiamo considerare il $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - senx^2}{x^4} =$ $\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1 - sent}{t^2}$.
Per il calcolo del limite basta applicare due volte la regola di De L'Hopital e quindi calcolare due derivate e non quattro, come richiesto dal metodo delle derivate successive. Si trova che $f_g^{'}(0) = \frac{1}{2} > 0$ e quindi 0 è punto di minimo relativo proprio per *f*.

Es.(6):
Mostriamo che 0 è punto di minimo relativo proprio per $f(x) = (e^{x^4} - 1)^5 \ln^7(1 + x^4) - sen^{22} x(1 - \cos x^{13})$.
Prendiamo la funzione $g(x) = x^{48} \in G^+$.
Poiché $f_g^{'}(0) = 1 - \frac{1}{2} > 0$, ne segue che 0 è punto di minimo relativo proprio per *f*. Notiamo che per calcolare $f_g^{'}(0)$ basta considerare qualche limite notevole, mentre il metodo delle derivate

successive richiederebbe un numero eccessivo di conti.

Es.(7):
Siano

$f_1(x) = (e^{x^4} - 1)^5 \ln^7(1 + x^4) - sen^{22} x(1 - \cos x^{13})$

e $f_2(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ **.** E'

noto che esistono le derivate di qualsiasi ordine della funzione f_2 in 0 e che tali derivate sono

tutte nulle. Poniamo $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$**,** anche la funzione *f* possiede le derivate di qualsiasi

ordine in 0 e sono tutte nulle, quindi, per dimostrare che 0 è punto di minimo relativo proprio non

possiamo applicare il metodo delle derivate successive. Poniamo $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} x^{48} \in G^+$, si ha che $f_g^{'}(0) = 1 - \frac{1}{2} > 0$, ne segue che 0 è punto di minimo relativo proprio per *f*.

Teorema (2)

Sia f una funzione definita in un intorno J di x_0 e continua in x_0; allora:

x_0 è punto di massimo relativo proprio per f se e solo se $\exists\, g \in G^+$ tale che $f_g^{'}(x_0) < 0$.

Dim.

Analoga al teor.(1).

ALCUNE QUESTIONI APERTE:

1) Quali ipotesi fare su f e/o l e g affinché da f e l g- continue in x_0 ne segue che fl è g- continua in x_0?
2) Se f è g- continua e t - continua in x_0 allora f è $(g \pm t)$ - continua, $(g \cdot t)$ -continua in x_0?
3) Analoga alla (2) per la derivabilità.
4) Se f non è continua in x_0, rispetto a quali g f è g-continua in x_0?
5) Analoga alla (4) per la derivabilità.
6) Quali dei risultati ottenuti nei paragrafi 2 e 3 si conservano utilizzando le def($1^{'}$) e def($2^{'}$) introdotte nell'osservazione 3?

POSSIBILI GENERALIZZAZIONI

Si possono definire, per una funzione f definita in un sottoinsieme di $\Re^n$, la g- continuità, le g-derivate parziali rispetto a x_i e le g-derivate direzionali.

Bibliografia

[1] Lamberti L., Mereu L., Nanni A.(2001) *Matematica Tre*, Etas, Torino
[2] Foresti P., Pepe P. (1991) *Complementi di Analisi Matematica e Numerica*, Sansoni Editore, Firenze
[3] Fiorenza R., Greco D.(1991) *Lezioni di Analisi Matematica* Volume primo, Liguori Editore, Napoli
[4] Guerraggio A.(1999) *Matematica Generale*, Bollati Boringhieri, Torino

ROBERTO RAUCCI,
Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche,
Università degli Studi di Salerno,
Via Ponte Don Melillo,
84084, Fisciano (Salerno),
rraucci@unisa.it

LUIGI TADDEO,
Liceo Scientifico " L.Garofano",
Via Napoli 1, 81043,
Capua (Ce),
luigitaddeo@inwind.it
lavoro pubblicato sul periodico della Mathesis, Serie VIII, Volume 3, Numero 2, aprile-giugno 2003