INDICE

INTRODUZIONE.

Questo libretto tratta uno dei cinque argomenti che costituiscono la parte operativa del programma di Matematica Generale per il corso di laurea in Economia Aziendale (Fac. di Ec., Univ. di Salerno); altri lavori analoghi riguardano gli altri argomenti. Perché cinque libretti diversi, invece di uno solo completo? La risposta consiste nel fatto che la parte di esercizi del programma è suddivisa in capitoli (o moduli, se si vuole usare un termine “attuale”), alcuni dei quali facoltativi per molti studenti; non solo, uno studente può avere bisogno di un riferimento bibliografico di esercizi per un argomento e non per un altro.

Oggetto di questo breve testo è l’equilibrio di Nash.

Altra domanda: perché abbiamo deciso di dare tanta importanza agli equilibri di Nash?

L’importanza che la Teoria dei Giochi riveste in Economia (e non solo) è rilevante ed in continua espansione; in particolare, nell’ambito dei giochi non cooperativi, l’equilibrio di Nash ha il ruolo centrale di soluzione quasi oggettivamente accettata (o, almeno, le soluzioni devono essere equilibri di Nash). Il fatto più “appariscente” a testimonianza di ciò è il Premio Nobel in Economia conferito a Nash.

Ci è, quindi, sembrato inaccettabile immaginare che del “bagaglio culturale” di un laureato della nostra Facoltà di Economia non facesse parte il concetto di equilibrio di Nash.

Tutto ciò, però, ancora non spiega la scelta di inserire tale studio nel programma dell’esame di Matematica Generale del primo anno e di richiedere la risoluzione di esercizi su questo argomento.

E’ nostra convinzione che la matematica nelle facoltà di economia deve trattare temi di questo tipo, cioè partire da situazioni economiche reali, mostrare modelli matematici approssimanti la realtà e trovare soluzioni mediante strumenti matematici; la matematica delle facoltà di economia deve distinguersi da quella dei biologi, da quella degli architetti e così via per la semplice ragione che ciò che serve ad un economista non è quello che serve ad un biologo o ad un architetto. Per troppo tempo i programmi di matematica nei corsi di laurea in cui essa era disciplina “di supporto” sono stati completamente scollegati dalle altre discipline; purtroppo, si è assistito a programmi di matematica che si limitavano a riproporre argomenti di scuola superiore (ad eccezione di qualche “aggiunta” molto tradizionale, completamente immotivata nel contesto). Il problema del tener conto delle differenze tra i vari tipi di scuola secondaria ci porterebbe ad un discorso che esula dagli interessi di questa trattazione (speriamo che la riforma dell'università dia risposte efficaci a tale proposito).

Inoltre osserviamo, come certamente non sfuggirà al lettore studioso, che molti esercizi sul calcolo degli equilibri di Nash rappresentano efficaci strumenti per valutare la capacità di operare sulle funzioni di una e più variabili e sull'ottimizzazione; in altri termini, hanno il pregio, tra l'altro, di riassumere una larga parte dell'Analisi Matematica.

Infine, avvertiamo il lettore studente che questo libretto va studiato successivamente al libro di teoria (qui e nel seguito, per libro di teoria, intendiamo "Metodi quantitativi delle decisioni" di V. Aversa, Liguori Editore) e dopo aver acquisito sufficiente padronanza delle prime tre parti operative del programma.

A quest'ultimo libro rinviamo immediatamente per rivedere le motivazioni, in particolare quelle di natura economica, che possono condurre al concetto di equilibrio di Nash.

P.S.: questa edizione, nelle speranze degli autori, può risultare utile a tutti coloro che abbiano interesse a ricercare equilibri di Nash nei casi in cui vi sono infinite strategie; da quanto ci risulta, altri libri che danno "tanto risalto" a tale aspetto non vi sono. Nelle nostre intenzioni, da tale edizione dovrebbe nascere un testo ben più completo e meno elementare, destinato a studenti di corsi successivi al primo anno e ad appassionati dell'argomento. Anche per questo, tutte le osservazioni, le segnalazioni di errori, tutti i suggerimenti, i giudizi, ci risulteranno particolarmente graditi.

CAPITOLO 1: LE STRATEGIE PURE.

Consideriamo un gioco a due giocatori. Denotiamo con X e Y gli insiemi delle decisioni o strategie pure, f e g le rispettive funzioni di utilità (ovviamente entrambe definite in $X \times Y$ e a valori in $\Re$). Nel seguito ogni volta che si parlerà di gioco, si intenderà che si tratta di un gioco non cooperativo (cioè i giocatori non possono fare accordi), statico (qui inteso nel senso che ogni giocatore può fare una sola mossa e che essi la comunicano simultaneamente), con informazione completa (cioè ogni giocatore conosce tutti gli insiemi di strategie e tutte le funzioni di utilità). Dal libro di teoria già sappiamo che in tali situazioni i giocatori cercano come soluzione del gioco un equilibrio di Nash. Ricordiamo che, per definizione, un equilibrio di Nash è una coppia $(\overline{x}; \overline{y}) \in X \times Y$ tale che $f(\overline{x}; \overline{y}) = \max_{x \in X} f(x; \overline{y})$ e $g(\overline{x}; \overline{y}) = \max_{y \in Y} g(\overline{x}; y)$ oppure, ciò che è lo stesso, posto $v(y)=\max_{x\in X} f(x;y)\ \forall\, y\in Y$ e $u(x)=\max_{y\in Y} g(x;y)\ \forall\, x\in X$, ogni coppia $(x;y)\in X\times Y$ tale che $\begin{cases} f(x;y)=v(y) \\ g(x;y)=u(x) \end{cases}$.

1.1 X e Y sono finiti.

Dal libro di teoria abbiamo già visto che vi sono giochi in cui non esistono equilibri di Nash (in strategie pure) e giochi in cui vi è un unico equilibrio di Nash.

Alcuni dei seguenti esempi mostrano che si possono avere più equilibri di Nash.

ESEMPIO :

1.1) $\begin{pmatrix} (1;0) & (2;3) & (1;4) \\ (3;0) & (4;1) & (1;5) \end{pmatrix}$ Il primo giocatore ha a disposizione 2 strategie e il terzo 3. Se il primo giocatore sceglie la strategia x_1, al secondo giocatore conviene rispondere con y_3; se il primo sceglie x_2, al secondo conviene y_3. Se il secondo giocatore sceglie y_1, al primo conviene x_2; se il secondo sceglie y_2, al primo conviene x_2; se il secondo sceglie y_3, al primo vanno bene sia x_1 che x_2. Si hanno 2 equilibri di Nash, rappresentati dalle coppie $(x_1; y_3)$ e $(x_2; y_3)$. Gli utili sono (1;4) e (1;5), quindi al primo risultano indifferenti le due soluzioni, mentre per il secondo è preferibile la soluzione $(x_2; y_3)$.

Un modo semplice per trovare gli equilibri di Nash in situazioni analoghe a quelle dell'esempio precedente è quello di fissare una strategia di uno dei due giocatori ed evidenziare di volta in volta le migliori strategie dell'altro (in verità evidenziamo gli utili) . Risolviamo lo stesso esercizio in questo modo:

Fissato x_1 si ha $\begin{pmatrix} (1;0) & (2;3) & (1;\overline{4}) \\ (3;0) & (4;1) & (1;5) \end{pmatrix}$;

Fissato x_2 si ha $\begin{pmatrix} (1;0) & (2;3) & (1;\overline{4}) \\ (3;0) & (4;1) & (1;\overline{5}) \end{pmatrix}$;

Fissato y_1 si ha $\begin{pmatrix} (1;0) & (2;3) & (1;\overline{4}) \\ (\overline{3};0) & (4;1) & (1;\overline{5}) \end{pmatrix}$;

Fissato y_2 si ha $\begin{pmatrix} (1;0) & (2;3) & (1;\overline{4}) \\ (\overline{3};0) & (\overline{4};1) & (1;\overline{5}) \end{pmatrix}$;

Fissato y_3 si ha $\begin{pmatrix} (1;0) & (2;3) & (\overline{1};\overline{4}) \\ (\overline{3};0) & (\overline{4};1) & (\overline{1};\overline{5}) \end{pmatrix}$.

ESERCIZI PROPOSTI:

1) $\begin{pmatrix} (2;0) & (0;5) & (1;3) \\ (4;1) & (1;3) & (2;-1) \end{pmatrix}$ **S:** $\{(x_2;y_2)\}$.

2) $\begin{pmatrix} (3;1) & (5;0) \\ (4;4) & (1;2) \\ (3;1) & (7;2) \end{pmatrix}$ **S:** $\{ (x_2 ; y_1),\ (x_3 ; y_2) \}$.

3) $\begin{pmatrix} (0;1) & (1;4) & (1;3) \\ (1;1) & (2;0) & (3;-1) \\ (2;0) & (0;2) & (1;1) \end{pmatrix}$ Non ci sono soluzioni.

1.2 X e Y sono insiemi infiniti.

Per ragioni di semplicità “concettuale” useremo sempre lo stesso metodo per risolvere gli esercizi, anche se, spesso, altri metodi possono risultare più adatti.

ESEMPI:

2.1) $f(x;y) = x^2 + 2y^2 - 1$ $\qquad g(x;y) = 2xy - y^2$

$X = [0;1]$ $\quad Y = [-1;1]$

Consideriamo $f'_x(x;y) = 2x$, $\quad f'_x(x;y) \geq 0$ per $x \geq 0$, dunque il max si ottiene per $x = 1$. Ne segue che $f(1;y) = 2y^2 = v(y)$.

Consideriamo $g'_y(x;y) = 2x - 2y$, $\quad g'_y(x;y) \geq 0$ per $y \leq x$. Tenuto conto che $x \in [0;1] \subset [-1;1]$, il max si ottiene per $y = x$, da cui si ha $g(x;x) = x^2 = u(x)$. Gli equilibri di Nash sono le eventuali soluzioni del sistema $\begin{cases} f(x;y) = v(y) \\ g(x;y) = u(x) \end{cases}$ verificanti le condizioni $x \in X, y \in Y$. Quindi dobbiamo risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 1 = 2y^2 \\ 2xy - y^2 = x^2 \end{cases}$ con $x \in [0;1], y \in [-1;1]$. Otteniamo l'unica soluzione **S={(1;1)}.**

3.1) $f(x;y)=e^{xy}$ $\qquad$ $g(x;y)=\log(xy+y^2-1)$

$X=[0;2]$ $\quad Y=[2;5]$

Consideriamo $f'_x(x;y)=ye^{xy}$, $f'_x(x;y)\geq 0$ sempre, tenuto conto degli insiemi delle strategie. Dunque il max si ottiene per $x=2$, da cui $f(2;y)=e^{2y}=v(y)$. Consideriamo

$g'_y(x;y)=\dfrac{x+2y}{xy+y^2-1}$; tenuto conto di X e Y si ha che $y=5$ è punto di massimo. Otteniamo, quindi,

$g(x;5)=\log(5x+24)=u(x)$. Dobbiamo allora risolvere il

sistema $\begin{cases} e^{xy}=e^{2y} \\ \log(xy+y^2-1)=\log(5x+24) \end{cases}$

e tener conto degli insiemi delle strategie. Ne segue l'unica soluzione **S={(2;5)}.**

4.1) $f(x;y)=\sqrt{x^2+y}$ $g(x;y)=2xy-x^2+y^2$

$X=[-1;2]$ $Y=[0;1]$

Consideriamo $f_x^{'}(x;y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}}$, $f_x^{'}(x;y)\geq 0$ per $x\geq 0$.

Per determinare il max dobbiamo considerare $f(-1;y)=\sqrt{1+y^2}$ e $f(2;y)=\sqrt{4+y^2}$. Essendo $f(2;y)>f(-1;y)$, il max si ottiene per $x=2$, da cui $f(2;y)=\sqrt{4+y^2}=v(y)$. Consideriamo $g_y^{'}(x;y)=2x+2y$, $g_y^{'}(x;y)\geq 0$ per $y\geq -x$. Bisogna distinguere i seguenti casi:

a) $-x\in[0;1]$, da cui $x\in[-1;0]$: poiché $g(x;y)$ (rispetto alla variabile y) è decrescente prima di $-x$ e crescente dopo, per determinare il max bisogna confrontare $g(x;0) = -x^2$ e $g(x;1) = 2x - x^2 + 1$. Da $g(x;0) \geq g(x;1)$ si ottiene $x \leq -\frac{1}{2}$, dunque per $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ il max si ottiene per $y = 0$, mentre per $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ il max si ottiene per $y = 1$.

Dunque per $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ $g(x;0) = -x^2 = u(x)$ e per $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ $g(x;1) = 2x - x^2 + 1 = u(x)$.

b) $-x < 0$, cioè $x > 0$: si ottiene che $g(x;y)$ è crescente, rispetto a y, dunque il max si ottiene per $y = 1$, da cui , per $x > 0$, $g(x;1) = 2x - x^2 + 1 = u(x)$.

c) $-x > 1$, cioè $x < -1$: è non accettabile tenuto conto dell'insieme X .

Dunque per $-1 \le x \le -\frac{1}{2}$ $u(x) = -x^2$ e per $-\frac{1}{2} \le x \le 2$

$u(x) = 2x - x^2 + 1.$ Dobbiamo allora risolvere i seguenti

sistemi:

$$1)\begin{cases} \sqrt{x^2 + y} = \sqrt{4+y} \\ 2xy - x^2 + y^2 = -x^2 \end{cases} \text{ con } -1 \le x \le -\frac{1}{2} \text{ e } y \in Y$$

che non fornisce nessuna soluzione accettabile e

$$2)\begin{cases} \sqrt{x^2 + y} = \sqrt{4+y} \\ 2xy - x^2 + y^2 = 2x - x^2 + 1 \end{cases} \text{ con } -\frac{1}{2} \le x \le 2 \text{ e } y \in Y$$

da cui si ottiene l'unica soluzione **S={(2;1)}.**

Osservazione 2.1

Avremmo potuto risolvere più semplicemente l'esercizio notando che, qualunque risposta *y* consideriamo del secondo giocatore, c'è un'unica soluzione per il primo giocatore, la strategia $x=2$; dunque gli equilibri di Nash, se esistevano, dovevano essere coppie in cui la prima coordinata era 2. Tenuto conto di ciò avremmo potuto considerare invece di $g(x;y), g(2;y)=4y+y^2-4$ e determinare il massimo di g, in questo caso diventata una funzione della sola variabile y, da cui avremmo ottenuto $y=1$ e quindi (2;1). Questa osservazione, valida, ovviamente, anche nei due esempi precedenti non è stata applicata prima perché negli altri due casi risolti il risparmio dei conti non era molto rilevante.

5.1) $f(x;y)=\frac{1}{2}x^2-\log xy$ $\qquad$ $g(x;y)=xy^2-y$

$X=[1;e]$ $\quad$ $Y=[1;2]$

Consideriamo $f'_x(x;y) = x - \frac{1}{x}$, $f'_x(x;y) \geq 0$ in X, dunque il max si ottiene per $x = e$. Dall'osservazione precedente consideriamo $g(e;y) = ey^2 - y$, dallo studio del segno della derivata prima della funzione così ottenuta e tenuto conto che $y \in [1;2]$, il massimo si ottiene per $y = 2$. Otteniamo quindi la soluzione **S={(*e*;2)}.** Proviamo a risolvere l'esercizio senza utilizzare l'osservazione precedente. Abbiamo già trovato che $f(e;y) = \frac{1}{2}e^2 - \log ey = v(y)$. Consideriamo $g'_y(x;y) = 2xy - 1$, $g'_y(x;y) \geq 0$ per $y \geq \frac{1}{2x}$, dunque bisogna distinguere i seguenti casi:

a) $\frac{1}{2x} \in [1;2]$, da cui $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ che non è accettabile;

b) $\frac{1}{2x} \geq 2$, da cui $0 < x \leq \frac{1}{4}$ che non è accettabile;

c) $\frac{1}{2x} \le 1$, da cui $\frac{1}{2} \le x \le e$ e quindi il max si ottiene per $y = 2$. Ne segue $g(x;2) = 4x - 2 = u(x)$ con $\frac{1}{2} \le x \le e$.

Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \log xy = \frac{1}{2}e^2 - \log ey \\ xy^2 - y = 4x - 2 \end{cases} \text{ con } \frac{1}{2} \le x \le e \text{ e } y \in Y .$$

Dalla seconda equazione del sistema si ha $y = 2$ (la condizione $x = \frac{1}{y+2}$ non è accettabile per i vincoli).

Sostituendo nella prima otteniamo $\frac{1}{2}x^2 - \log x = \frac{1}{2}e^2 - 1$; notiamo che $x = e$ è una soluzione. Per mostrare che è l'unica consideriamo la funzione $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - \log x - \frac{1}{2}e^2 + 1$.

Poiché $h^{'}(x) > 0$ in $[1; e]$ ne segue che h è strettamente crescente in quest'intervallo, dunque $x = e$ è l'unica soluzione dell'equazione $h(x)=0$ in $[1;e]$ e cioè $(e;2)$ è l'unico equilibrio di Nash.

6.1) $f(x;y)=x^2+2xy+y^2-1$ $\qquad g(x;y)=xy+4$

$X=]-\infty;0]$ $Y=[0;1]$

Consideriamo $f_x^{'}(x;y)=2x+2y$, $f_x^{'}(x;y)\geq 0$ per $x\geq -y$.Tenuto conto dei vincoli, per determinare il max dobbiamo confrontare $f(0;y)=y^2-1$ con il limite per $x\to -\infty$ di $f(x;y)$ e poiché quest'ultimo è uguale a $+\infty$, il max non esiste, dunque il problema non ammette soluzioni.

7.1) $f(x;y)=-x^2+2xy-y^2$ $\qquad g(x;y)=e^{xy}+x^2$

$X=(\Re-Z)\cup\{0\}$ $\quad Y=]-1;1[$

Consideriamo $f_x^{'}(x;y) = -2x + 2y$, $f_x^{'}(x;y) \geq 0$ per $x \leq y$,

quindi il max si ottiene per $x = y$, da cui si ha

$f(y;y) = 0 = v(y)$. Consideriamo $g_y^{'}(x;y) = xe^{xy}$

$g_y^{'}(x;y) \geq 0$ per $x \geq 0$. Dunque, per $x > 0,$ il max non esiste

poiché l'estremo superiore è dato dal limite per $y \to 1$ di

$g(x;y)$, mentre per $x < 0$ il max non esiste poiché l'estremo

superiore è dato dal limite per $y \to -1$ di $g(x;y)$; per $x = 0$

la g è costantemente uguale a 1. Ne segue che la funzione u

è definita solo nel punto 0 dove vale 1.

Dal sistema:

$$\begin{cases} -x^2 + 2xy - y^2 = 0 \\ e^{xy} + x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{con } x = 0 \text{ e } y \in \left]0;1\right[$$

si ottiene **S**= **{(0;0)}.**

8.1) Mostriamo un esempio in cui le funzioni utilità dei due giocatori hanno più di 2 variabili.

$$f(x;t;y) = -x^2 + 2xt - t^2 + y^2 \quad g(x;t;y) = 2x^2 t - y^2 - 1$$

$$X = \{(x;t) : x \in [0;1], t \in [1;2]\} \quad Y = [0;1]$$

Notiamo che in questo gioco il primo giocatore deve scegliere x e t, mentre il secondo solo y. Nel piano xOt l'insieme X rappresenta il quadrato Q di vertici $A(0;1)$, $B(0;2)$, $C(1;2)$ e $D(1;1)$. Per determinare i punti di massimo di f calcoliamo $f_x^{'}(x;t;y) = -2x + 2t$ e $f_t^{'}(x;t;y) = 2x - 2t$. Poiché $\begin{cases} -2x + 2t = 0 \\ 2x - 2t = 0 \end{cases}$ non ha soluzioni interne a Q, i punti di massimo di f (certamente esistenti per il teorema di Weierstrass) si trovano sulla frontiera di Q. Studiando f sul segmento di estremi A e D di rappresentazione parametrica $\begin{cases} t = 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ avremo $f(x;1;y) = -x^2 + 2x - 1 + y^2$, $f_x^{'} = 0$ per $x = 1$ da cui deduciamo che del segmento di estremi A e D solo i punti A e D possono essere punti di massimo. Studiando f sugli altri lati del quadrato otteniamo, come altri "probabili" punti di max, gli altri vertici B e C. Per determinare i punti di massimo dobbiamo calcolare f su questi punti. Si ha: $f(1;1;y) = y^2$, $f(0;1;y) = -1 + y^2$, $f(1;2;y) = -1 + y^2$ e $f(0;2;y) = -4 + y^2$, da cui si ottiene il massimo nel punto $D(1;1)$. Ne segue $v(y) = y^2$. A tale conclusione potevamo pervenire più rapidamente se avessimo notato che per ogni $y \in Y$ si ha: $f(x;t;y) = y^2 - (x-t)^2 \leq y^2$ e $f(x;t;y) = y^2$ se, e solo se, $x = t$ da cui, ricordando X, l'asserto.

Inoltre si ha: $g'_y(x;t;y) = -2y \geq 0$ per $y \leq 0$, dunque $f(x;t;0) = u(x;t) = 2x^2 t - 1$.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -x^2 + 2xt - t^2 + y^2 = y^2 \\ 2x^2 t - y^2 - 1 = 2x^2 t - 1 \end{cases}$$

otteniamo $x = t$ e $y = 0$ da cui si ha il solo equilibrio di Nash (1;1;0).

ESERCIZI PROPOSTI :

1) $f(x;y) = x^2 + 2xy - 1$ $g(x;y) = x - y$

$X = [-2;2]$ $Y = [0;1]$

S={(-2;0); (2;0)}.

Notiamo che la migliore strategia per il secondo giocatore è **(2;0)**.

2) $f(x;y) = x + y$ $g(x;y) = xy^3$

$X = [-2;-1]$ $Y = [0;1]$

S={ (-1;0) }.

3) $f(x;y) = x^2 - 3xy + 1$ $g(x;y) = xy^2 + 2y^2$

$X = [-1;1]$ $Y = [-2;3]$

S={ (-1;3) }.

4) $f(x;y) = x^2 + xy - 2$ $g(x;y) = x + xy + y^2$

$X = [-1;1]$ $Y = [-2;5]$

S={ (1;5) }.

5) $f(x;y) = 2 - xy$ $g(x;y) = 3y - x^2$

$X = [0;3]$ $Y = [-2;4]$

S={ (0;4) }.

6) $f(x;y) = -e^x + y \quad g(x;y) = \log xy$

$X = [1;2] \quad Y = [2;3]$

S={ (1;3) }.

7) $f(x;y) = x^2 + 2xy + 1 \qquad g(x;y) = x^2 - y^2$

$X = [0;2] \quad Y = [-1;1]$

S={ (1;0) }.

8) $f(x;y) = x^2 + 2xy - 4y^2 \qquad g(x;y) = xy + y^2 - 5$

$X = [-1;1] \quad Y = [0;3]$

S={ (1;3) }.

9) $f(x;y)=x^2+4x-y^2$ $g(x;y)=4xy-y^2+1$

$X=[-5;2]$ $Y=[0;3]$

S= { (2;3) }.

10) $f(x;y)=\log(x+y)-2\sqrt{x+y^2}$ $g(x;y)=e^{x^2+y^2}-1$

$X=[-2;-1]$ $Y=[3;4]$

S={ (-1;4) }.

11) $f(x;y)=2-x^3y$ $g(x;y)=-x^2y^2$

$X=[0;1]$ $Y=[-2;-1]$

S={ (1;-1) }.

12) $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$ $g(x;y)=\log(x^2+y^2)$

$X=[-1;0]$ $Y=[1;2]$

S={ (-1;2) }.

13) $f(x;y)=x^2+2y^2$ $g(x;y)=3x^2-4y^2+xy$

$X=Y=\Re$

Impossibile

14) $f(x;y)=-3x^2+xy$ $g(x;y)=2y^2-3xy+1$

$X=Y=\Re$

Impossibile

15) $f(x;y) = -4x^2 + xy \quad g(x;y) = 2x^2 - y^2$

$X = Y = \Re$

S={ (0;0) }.

16) $f(x;y) = -x^2 + 2xy - 4y^2 \quad g(x;y) = 2x^2 - y^2 + xy$

$X = Y = \Re$

S={ (0;0) }.

17) $f(x;y) = -4x^2 + 2xy + y^2 \quad g(x;y) = 3x^2 - y^2 - 2xy$

$X = Y = \Re$

S={ (0;0) }.

18) $f(x;y) = -2x^2 + 4xy + y^2 \quad g(x;y) = x^2 - y^2 + 2xy$

$X = Y = \Re$

S=$\{(x;x)$ tali che $x \in \Re\}$

19) $f(x;y) = -x^2 + 4xy - 3y^2 \quad g(x;y) = 2x^2 + xy - y^2$

$X = Y = \Re$

S= $\{(2y;y) \text{ tali che } y \in \Re\}$

20) $f(x;y) = -x^2 + 2xy + y^2 \quad g(x;y) = x^2 + y^2 - 1$

$X = \Re \;\; Y =]-\infty;0[$

Impossibile

21) $f(x;y) = x + \log x - y$ $\qquad g(x;y) = xy^2$

$X =]0;+\infty[\quad Y =]2;3]$

Impossibile

22) $f(x;y) = x^3 - 3y^2 \log x$ $g(x;y) = e^{xy}$

$X =]0;1]$ $Y = [0;1] \cup [2;3[$

Impossibile

23) $f(x;y) = \sqrt{x+y}$ $g(x;y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{xy}$

$X = [0;1[\cup [2;3]$ $Y = [0;+\infty[$

S={ (3;0) }.

24) $f(x;y) = x^3 - 3xy^2$ $g(x;y) = xy + \log x$

$X = [1;2]$ $Y = [-2;0[$

Impossibile

25) $f(x;y) = x^y + y^2$ $g(x;y) = \dfrac{xy}{x-y}$

$X = [1;2]$ $Y =]-\infty;1[\cup]2;3]$

Impossibile

26) $f(x;y) = xe^y + ye^x$ $g(x;y) = \log(x^2 + y^2)$

$X =]-\infty;0]$ $Y =]0;1]$

S={ (0;1) }.

27) $f(x;y) = \sqrt{e^x - y^2}$ $g(x;y) = \sqrt[3]{x+y}$

$X =]2;6]$ $Y =]0;2]$

S={ (6;2) }.

28) $f(x;t;y) = -x^2 + 2xt - t^2 + 3y^2 \quad g(x;t;y) = xt - y^2 + 1$

$X = \{(x;t) : x \in [0;1], t \in [2;4]\} \quad Y = [-1;0]$

S={ (1;2;0) }.

29) $f(x;t;y) = -x^2 + 2xy - t^2 + 1 \quad g(x;t;y) = 2x^2 - 3y^2 + ty$

$X = [0;1] \quad Y = \{(t;y) : t \in [0;1], y \in [-1;1]\}$

S={ ($\frac{1}{6}$;1;$\frac{1}{6}$)}.

30) $f(x;y) = \log\frac{x}{y} - \frac{1}{2}x^2y^2 \qquad g(x;y) = xy^2 - 2y$

$X =]-\infty;-2[\cup [-1;0[\quad Y = [-2;0[$

Con qualche conto più complicato, rispetto ai precedenti, si ha:

S=$\{(x;y) \in X \times Y$ tali che $xy = 1,$

$y \in [-2;-1] \cup \left]-\frac{1}{2};0\right[\}$

1.3 X è infinito e Y è finito (o viceversa).

ESEMPI:

9.1) Siano $X = [0;1]$, $Y = \{0;1;2\}$, f e g definite da $f(x;y) = x + y,\ g(x;y) = x + y^2 - y$. Si ha:

$$v(y) = \max_{x\in[0;1]}(x + y) = (\text{tenuto conto di } X) = 1 + y,$$

$u(x) = \max_{y\in\{0;1;2\}}(x + y^2 - y) = \max\{x; x + 2\} = x + 2$ e, quindi,

gli equilibri di Nash sono le coppie di $X = [0;1]\times\{0;1;2\}$ che risultano soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 + y \\ x + y^2 - y = x + 2 \end{cases}.$$

Le soluzioni del sistema sono (1;-1) e (1;2), poiché -1 $\notin Y$, solo la seconda è equilibrio di Nash.

Tramite detto equilibrio i giocatori realizzano (3;3). Notiamo che avremmo potuto evitare il sistema se avessimo tenuto conto che, per ogni $y \in Y$, il punto 1 è l'unico punto di massimo di $f(x;y)$ al variare di x in X e che, per ogni $x \in X$, il punto 2 è l'unico punto di massimo di $g(x;y)$ al variare di y in Y.

10.1) Siano $X = \mathrm{N} \cap [1;100]$, $Y = [-1;1]$,

$f(x;y) = y(4x^3 - 42x^2 + 135x + 1)$, $g(x;y) = (2x-3)y^2$.

In questo esempio, anche se X è finito, poiché gli appartengono 100 elementi, è preferibile usare la derivata.

Poiché $f_x'(x;y) = 3y(2x-5)(2x-9)$ si ha: se $y = 0$ risulta $f(x;y) = f(x;0) = 0$ per ogni $x \in X$ e quindi $v(0) = 0$; se $y > 0$, poiché $f_x'(x;y) > 0$, tenuto conto di *X*, per $x \in \left]-\infty;\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{9}{2};100\right]$ si deduce che i punti di massimo di $f(x;y)$ al variare di x in X vanno ricercati tra 2,3 e 100 (infatti 2 e 3 sono gli interi più vicini a $\frac{5}{2}$, punto di massimo relativo di f) da cui si ha $v(y) = \max\{135y; 136y; 3593501y\} = 3593501y$ (quindi 100 è il punto di massimo); se $y < 0$, ragionando analogamente si deduce che $v(y) = 98y$ (quindi 1 è il punto di massimo).

Da $g'_y(x; y) = 2y(2x - 3)$ si deduce che per $x = 1$ il punto di massimo di $g(x; y)$ al variare di y in Y è 0 e quindi $u(1) = 0$; invece se $x \in X$ e $x > 1$ i punti di massimo sono –1 e 1 e quindi $u(x) = 2x - 3$. Ciò che abbiamo dedotto fino a questo punto ci consente di comprendere, usando opportunamente la definizione di equilibrio di Nash e senza risolvere alcun sistema, che le soluzioni sono (1;0) e (100;1). Lasciamo al lettore studioso tale verifica (in verità tale procedimento introduce ad un altro metodo di ricerca degli equilibri di Nash, a cui abbiamo fatto cenno all'inizio del paragrafo).

Se si preferisce risolvere il sistema bisogna tener conto delle seguenti espressioni di v e u:

$$v(y)=\begin{cases} 98y \text{ se } y\in[-1;0] \\ 3593501y \text{ se } y\in\,]0;1] \end{cases};\quad u(x)=\begin{cases} 0 \text{ se } x=1 \\ 2x-3 \text{ se } x\in \mathrm{N}\cap[2;100] \end{cases};$$

allora, considerando i seguenti 4 casi:

$y\in[-1;0],\quad x=1;$

$$\begin{cases} y(4x^3-42x^2+135x+1)=98y \\ (2x-3)y^2=0 \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equilibrio di Nash (1;0);

$y\in[-1;0],\quad x\in \mathrm{N}\cap[2;100];$

$$\begin{cases} y(4x^3-42x^2+135x+1)=98y \\ (2x-3)y^2=2x-3 \end{cases}$$

da cui non si ottengono equilibri di Nash ;

$y\in\,]0;1],\, x=1;$

$$\begin{cases} y(4x^3-42x^2+135x+1)=3593501y \\ (2x-3)y^2=0 \end{cases}$$

da cui non si ottengono equilibri di Nash ;

$y \in]0;1], x \in \mathrm{N} \cap [2;100];$

$$\begin{cases} y(4x^3 - 42x^2 + 135x + 1) = 3593501y \\ (2x-3)y^2 = 2x-3 \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equilibrio di Nash (100;1), si ritrovano i risultati precedenti.

ESERCIZI PROPOSTI:

1) $X = [-1;1]$ $Y = \{-1;0;1\}$ $f(x;y) = x^2 + xy$

$g(x;y) = xy^2 + y$ **S: {(1;1), (-1;0)}.**

2) $X = \{1;2;3\}$ $Y = [0;1]$ $f(x;y) = x^2 + xy$

$g(x;y) = e^{xy}$ **S: { (3;1) }.**

3) $X = N \cap [0;100]$ $Y = [-1;1]$ $f(x;y) = x^2 + 2xy$

$g(x;y) = xy^2$ **S: { (100;1), (100;-1) }.**

4) $X = [0;2]$ $Y = Z \cap [-100;100]$ $f(x;y) = xe^{y} + 1$

$g(x;y) = x^2 y^2 + 1$ **S: { (2;100), (2;-100) }.**

CAPITOLO 2: LE STRATEGIE MISTE

In questo capitolo consideriamo solo giochi in cui gli insiemi delle strategie (pure) sono finiti.

Come già visto nel libro di teoria, un equilibrio di Nash in strategie miste esiste sempre. Su tale fatto ritorneremo più diffusamente nel prossimo capitolo.

Adesso vogliamo formalizzare il fatto che una strategia pura può essere vista come una "particolare" strategia mista.

Infatti, posto $X = \{x_1, ..., x_m\}$, $Y = \{y_1, ..., y_n\}$, studiare il gioco considerando le strategie miste significa passare dal gioco G, in cui gli insiemi delle decisioni sono *X* e *Y* e le funzioni di utilità sono *f* e *g*, al gioco in cui gli insiemi delle decisioni sono

$U = [0;1]^m \cap \{p = (p_1, ..., p_m), \text{tale che } p_1 + ... + p_m = 1 \}$,

$V = [0;1]^n \cap \{q = (q_1, ..., q_n), \text{tale che } q_1 + ... + q_n = 1 \}$ e le funzioni di utilità sono (definite in $U \times V$ e a valori in $\Re$) date da:

$$\varphi(p;q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i; y_j) p_i q_j \text{ e}$$

$$\psi(p;q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(x_i; y_j) p_i q_j \ .$$

E’ evidente che possiamo identificare ogni strategia pura x_i con la strategia mista $p = (p_1, ..., p_m)$ tale che $p_i = 1$ e $p_h = 0$ per ogni $h \neq i$ e ogni strategia pura y_j con la strategia mista $q = (q_1, ..., q_n)$ tale che $q_j = 1$ e $q_k = 0$ per ogni $k \neq j$; si noti che risulta $\varphi(x_i; y_j) = f(x_i; y_j)$ e $\psi(x_i; y_j) = g(x_i; y_j)$.

A questo punto, tenuto conto di ciò, sorgono in modo naturale le seguenti domande:

i) un gioco che non ammette equilibri di Nash in strategie pure avrà, invece, equilibri di Nash in strategie miste; tra questi, si può trovare qualche coppia di strategie pure?

ii) un gioco che ammette equilibri di Nash in strategie pure, avrà tra gli equilibri di Nash in strategie miste solo quelle pure (tutte? una parte?), solo non pure o sia pure (tutte? una parte?) che non pure?

La risposta alla prima domanda è negativa; per quanto riguarda la seconda domanda si può affermare che tra gli equilibri di Nash in strategie miste si ritroveranno certamente tutti gli equilibri di Nash in strategie pure mentre quelle non pure in alcuni casi vi sono e in altri no. I successivi due esempi e la proposizione 3.3 del prossimo capitolo motivano le suddette risposte.

Specialmente quando l'insieme delle strategie di almeno uno dei due giocatori è costituito da più di due decisioni possibili, nella ricerca degli equilibri di Nash in strategie miste, risultano utili le considerazioni che seguono.

Sia dato un problema del tipo:

$\max_{x \in A}(cx + c_{n+1})$ ove $c = (c_1, ..., c_n)$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \Re^n$ e

A è definito da

$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \end{cases}$. Denotato con V l'insieme

$\{O, A_r$ tali che $r \in \{1,...,n\}\}$ ove, per ogni $r \in \{1,...,n\}$, il punto A_r è il punto $(y_1,...,y_n)$ tale che $y_s = \begin{cases} 1 \text{ se } s = r \\ 0 \text{ se } s \neq r \end{cases}$, sia W l'insieme delle soluzioni del seguente problema:

$$\max_{x \in V}(cx + c_{n+1}).$$

Osserviamo che W è non vuoto perché V è finito.

Ebbene, sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 2.1

Detti $P_1,...,P_s$ i punti di W, l'insieme dei punti di massimo della funzione $\tau(x) = (cx + c_{n+1})$ sull'insieme A definito da $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \end{cases}$ è dato da tutti e soli i punti del tipo:

$\sum_{i=1}^{s} \beta_i P_i$ con $\beta_i \geq 0\ \forall i \in \{1,...,s\}$ e $\sum_{i=1}^{s} \beta_i = 1$.

Da tale proposizione notiamo che, in particolare, se *W* è costituito da un unico punto, allora è evidente che esso è l'unico punto di massimo; se invece *W* è costituito da due punti *P* e *Q*, allora tutti e soli i punti di massimo sono quelli del segmento di estremi *P* e *Q* inclusi gli estremi (invero, se $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ e $\beta_1 + \beta_2 = 1$ si ha $\beta_1 P + \beta_2 Q = \beta_1 P + (1 - \beta_1) Q =$ $= Q + \beta_1 (P - Q)$ con $\beta_1 \in [0;1]$ che fornisce una rappresentazione del segmento *PQ*).

Useremo tale proposizione principalmente nel caso n=2. Ebbene, in tal caso, l'insieme *A* si riduce al triangolo di $\Re^2$ avente vertici (0;0), (1;0) e (0;1) e *W* risulta l'insieme di detti vertici.

La dimostrazione della suddetta proposizione è riservata al capitolo successivo.

Consideriamo i seguenti due esempi:

2.1) $\begin{pmatrix} (1;0) & (2;3) & (1;4) \\ (3;0) & (4;1) & (1;5) \end{pmatrix}$. Per risolvere questo gioco (è l'esempio 1.1 del paragrafo 1.1) in strategie miste, notiamo che una strategia mista per il primo giocatore è del tipo $(p_1, 1-p_1)$ con $p_1 \in [0;1]$, mentre una strategia mista per il secondo giocatore è $(q_1, q_2, 1-q_1-q_2)$ con $q_1, q_2 \geq 0$ e $q_1 + q_2 \leq 1$.

Attribuendo ai simboli seguenti il significato innanzi precisato, si ha:

$\varphi(p;q) = p_1 q_1 + 2p_1 q_2 + p_1(1-q_1-q_2) + 3(1-p_1)q_1 +$

$4(1-p_1)q_2 + (1-p_1)(1-q_1-q_2) = p_1(-2q_2 - 2q_1) +$

$+ 2q_1 + 3q_2 + 1.$

Da ciò si deduce che $\varphi'_{p_1}(p;q) = -2q_2 - 2q_1$ che è non positiva dal momento che $q_1, q_2 \geq 0.$ Ne segue che

$v(q) = \max_{p \in U} \varphi(p;q) = 2q_1 + 3q_2 + 1.$

Analogamente si ha:

$$\psi(p;q) = 3p_1q_2 + 4p_1(1-q_1-q_2) + (1-p_1)q_2 +$$

$$+5(1-p_1)(1-q_1-q_2) = q_1(p_1-5) + q_2(3p_1-4) + 5 - p_1.$$

Per ogni fissato $p_1 \in [0;1]$, possiamo applicare la proposizione 2.1. Dunque calcoliamo

$\psi(p_1;0;0) = 5 - p_1$, $\psi(p_1;1;0) = 0$ e

$\psi(p_1;0;1) = 2p_1 + 1$. Da ciò otteniamo immediatamente:

$$u(p) = \max_{q \in V} \psi(p;q) = 5 - p_1.$$

Lasciamo al lettore studente la risoluzione del seguente sistema:

$\begin{cases} \varphi(p;q) = v(q) \\ \psi(p;q) = u(p) \end{cases}$ dal quale si dedurrà che gli equilibri di Nash in strategie miste sono dati dai vettori del tipo:

$((p_1, 1-p_1), (0,0,1))$ con $p_1 \in [0;1]$. Notiamo che tra le infinite strategie miste che sono equilibri di Nash ritroviamo le strategie pure $(x_1; y_3)$ e $(x_2; y_3)$ che costituivano gli equilibri di Nash in strategie pure.

2.2) $\begin{pmatrix} (3;1) & (5;0) \\ (4;4) & (1;2) \\ (3;1) & (7;2) \end{pmatrix}$. Per risolvere questo gioco (è l'esercizio proposto n.2 del paragrafo 1.1) in strategie miste, notiamo che una strategia mista per il primo giocatore è del tipo $(p_1, p_2, 1-p_1-p_2)$ con $p_1, p_2 \geq 0$ e $p_1 + p_2 \leq 1$, mentre una strategia mista per il secondo giocatore è $(q_1, 1-q_1)$ con $q_1 \in [0;1]$. Con semplici calcoli si ha:

$\varphi(p;q) = 2p_1q_1 + 7p_2q_1 - 2p_1 - 6p_2 - 4q_1 + 7$. Per ogni fissato $q_1 \in [0;1]$ possiamo applicare la proposizione 2.1.

Quindi calcoliamo $\varphi(0;0;q_1) = 7 - 4q_1$, $\varphi(1;0;q_1) = 5 - 2q_1$ e $\varphi(0;1;q_1) = 1 + 3q_1$.

Confrontando tali valori di φ deduciamo che:

$$v(q)=\begin{cases}7-4q_1 \text{ se } q_1\in\left[0;\frac{6}{7}\right]\\ 1+3q_1 \text{ se } q_1\in\left]\frac{6}{7};1\right]\end{cases}.$$

Per quanto riguarda il secondo giocatore troviamo:

$\psi(p;q)=(3p_2+2p_1-1)q_1+2-2p_1$.

Da ciò deduciamo che:

$$u(p)=\begin{cases}1+3p_2 \text{ se } p\in U \text{ e } 3p_2+2p_1\geq 1\\ 2-2p_1 \text{ se } p\in U \text{ e } 3p_2+2p_1>1\end{cases}.$$

Lasciamo al lettore studente il compito di completare l'esercizio constatando che gli unici equilibri di Nash sono dati dalle coppie di strategie pure $(x_3;y_2)$ e $(x_2;y_1)$.

ESERCIZI PROPOSTI

Determinare gli equilibri di Nash in strategie miste dei seguenti giochi:

1) $\begin{pmatrix} (1;0) & (0;-1) \\ (0;1) & (0;1) \end{pmatrix}$

S={ $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ **}.**

Notiamo che da tale esempio si deduce che due coppie distinte possono consentire gli stessi risultati, pur essendo una sola delle due equilibrio di Nash.

2) $\begin{pmatrix} (1;2) & (3;1) \\ (2;1) & (1;4) \end{pmatrix}$

S={ $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ **}**

3) $\begin{pmatrix} (0;3) & (4;2) \\ (1;1) & (5;1) \end{pmatrix}$

S={ $(x_2; (q_1, 1-q_1))$ tali che $q_1 \in [0;1]$ **}.**

4) $\begin{pmatrix} (0;2) & (0;0) \\ (0;1) & (0;1) \end{pmatrix}$

S=

$\{(x_2;(q_1,1-q_1)) \text{ tali che } q_1 \in [0;1]\} \cup \{((p_1,1-p_1),y_1) \text{ tali che } p_1 \in]0;1]\}$

5) $\begin{pmatrix} (1;1) & (0;-5) \\ (0;0) & (1;0) \end{pmatrix}$

S=$\left\{(x_2;(q_1,1-q_1)) \text{ tali che } q_1 \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\right\} \cup \{(x_1;y_1)\}$**.**

6) $\begin{pmatrix} (2;0) & (0;5) & (1;3) \\ (4;1) & (1;3) & (2;-1) \end{pmatrix}$

S={ $(x_2;y_2)$ **}.**

CAPITOLO 3: COMPLEMENTI.

Notiamo che, fino ad ora, abbiamo parlato di gioco, ne abbiamo dato una descrizione più o meno concreta, ma non abbiamo dato una definizione (formale) di gioco. Il lettore studioso si sarà chiesto se il concetto di gioco è primitivo oppure no. Ebbene, nei limiti di questa trattazione, ci si può accontentare di questa definizione:

DEFINIZIONE 3.1: Si dice gioco ogni quaterna del tipo $G = (X, Y, f, g)$, ove X e Y sono insiemi e f e g sono funzioni definite in $X \times Y$ e a valori in $\Re$.

Ovviamente la sola definizione formale (anche se "contiene tutto ciò che formalmente serve"), senza le considerazioni svolte nel libro di teoria e nei capitoli precedenti, "dice poco".

Dopo aver soddisfatto questa curiosità, ci apprestiamo a soddisfarne un'altra: è noto un teorema che assicuri l'esistenza di un equilibrio di Nash? Per vedere soddisfatta tale nuova richiesta, il lettore si predisponga a pagare un prezzo più alto (in termini di tempo e di impegno).

Per cominciare, dobbiamo considerare la seguente definizione di funzione concava:

DEFINIZIONE 3.2: Si dice che la funzione l , definita in una parte convessa Ω di $\Re^n$ e a valori in $\Re$ è concava, se e solo se, per ogni P e Q $\in \Omega$ e $t \in [0;1]$ risulta: $l[tP + (1-t)Q] \geq tl(P) + (1-t)l(Q);$ si dirà convessa se e solo se la funzione $-l$ è concava.

Notiamo che se l è una funzione lineare, come si deduce subito dalle definizioni, allora è sia concava che convessa.

Solitamente il problema di comprendere se una data funzione è concava risulta poco agevole mediante la definizione.

Vi è, però, un criterio che permette spesso di risolvere il problema facilmente; lo enunciamo prima per le funzioni di una variabile e poi per le funzioni di due variabili (evitando una formulazione generale con $n \in N$ perché nel nostro contesto rappresenterebbe solo un'inutile complicazione).

PROPOSIZIONE 3.1.

Sia l una funzione definita in un intervallo I di $\Re$ e ivi dotata di derivata seconda continua. Allora l è concava se e solo se $l''(x) \leq 0 \ \forall x \in I$

PROPOSIZIONE 3.2.

Sia *l* una funzione definita in un convesso I di $\Re^2$ e ivi dotata di derivate parziali seconde continue. Allora *l* è concava se e solo se $\begin{cases} (l''_{xx} l''_{yy} - (l''_{xy})^2)(x;y) \geq 0 \\ l''_{xx}(x;y) \leq 0 \end{cases} \forall (x;y) \in I$

Inoltre, abbiamo bisogno della nozione di insieme compatto in $\Re^n$.

DEFINIZIONE 3.3: Sia X un sottoinsieme di $\Re^n$; diremo che X è compatto se e solo se X è chiuso (cioè ogni punto di accumulazione di X appartiene a X) e limitato (cioè esiste un cerchio aperto di $\Re^n$ che lo contiene).

A questo punto siamo in grado di enunciare una versione semplificata del teorema di Nash (in realtà esistono risultati di esistenza più generali ma esulano dagli scopi della presente trattazione) nel caso in cui X è un sottoinsieme di $\Re^m$ e Y è un sottoinsieme di $\Re^n$ con $m, n \in N$.

Denotati con $G = (X, Y, f, g)$ un gioco, per ogni $y \in Y$ con H_y la funzione definita in X da $H_y(x) = f(x; y)$ e per ogni $x \in X$ con K_x la funzione definita in Y da $K_x(y) = g(x; y)$, sussiste il seguente:

TEOREMA 3.1 (di Nash)

Se X e Y sono compatti e convessi, f e g sono continue e se per ogni $(x; y) \in X \times Y$ le funzioni H_y e K_x sono concave, allora esiste un equilibrio di Nash.

Ora siamo "quasi" in grado di dimostrare che un equilibrio di Nash in strategie miste esiste sempre. A tal fine, l'ultimo strumento di cui abbiamo bisogno è il seguente:

LEMMA 3.1

Sia l una funzione definita in $\Omega \subseteq \Re^n$ e a valori in $\Re$ e sia T una parte di $\Re$. Se l è continua e Ω e T sono chiusi, allora l'insieme $l^{-1}(T) = \{\omega \in \Omega \text{ tali che } l(\omega) \in T\}$ è chiuso.

DIMOSTRAZIONE

Sia a un punto di accumulazione di $l^{-1}(T)$ (quindi è di accumulazione anche per Ω; inoltre, poiché Ω è chiuso, $a \in \Omega$). Dobbiamo provare che $a \in l^{-1}(T)$ cioè $l(a) \in T$. Se supponiamo, per assurdo, che $l(a) \notin T$, allora, poiché T è chiuso, $l(a)$ non è un punto di accumulazione di T e quindi esiste un intorno J di $l(a)$ tale che $J \cap T = \emptyset$. Poiché l è continua, fissato l'intorno J di $l(a)$ esiste un intorno I di a tale che $b \in I \cap \Omega \Rightarrow l(b) \in J$. Detto c un punto di $I \cap l^{-1}(T)$ (certamente esistente perché a è di accumulazione per

$l^{-1}(T))$ si ha, quindi, $l(c) \in J \cap T$, contro il fatto che $J \cap T = \varnothing$.

A questo punto, con le notazioni del Capitolo 2, si ha:

TEOREMA 3.2

Il gioco $\overline{G} = (U, V, f, g)$ ammette equilibri di Nash.

DIMOSTRAZIONE

Poiché l'intersezione di due chiusi è un chiuso, dal lemma precedente si deduce che U e V sono chiusi. Inoltre, tenuto conto che l'intersezione di due insiemi limitati è un insieme limitato e che l'intersezione di due convessi è un convesso, si ha che U e V sono compatti e convessi. Tenuto conto di tutto ciò e del fatto che una funzione composta da funzioni elementari è continua e del fatto che una funzione lineare è concava, si deduce che è lecito applicare il teorema di Nash, da cui la tesi.

Utilizzando le notazioni del capitolo precedente, dimostriamo la seguente proposizione, “promessa” nel capitolo suddetto.

PROPOSIZIONE 3.3

La coppia $(x_i ; y_j)$ (con $i \in \{1,...,m\}$, $j \in \{1,...,n\}$) è un equilibrio di Nash del gioco $G = (X, Y, f, g)$ se, e solo se, è un equilibrio di Nash del gioco $\overline{G} = (U, V, \varphi, \psi)$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $(x_i ; y_j)$ un equilibrio di Nash del gioco *G*. Allora $f(x_i ; y_j) \geq f(x_h ; y_j)$ per ogni $h \in \{1,...,m\}$ e quindi, $\forall p \in U$ si ha:

$$\varphi(p; y_j) = \sum_{h=1}^{n} p_h f(x_h ; y_j) \leq f(x_i ; y_j) \sum_{h=1}^{n} p_h = f(x_i ; y_j) = \varphi(x_i ; y_j)$$

Procedendo in modo analogo si dimostra che per ogni $q \in V$

risulta $\psi(x_i; q) \le \psi(x_i; y_j)$.

Inversamente, sia $(x_i; y_j)$ un equilibrio di Nash del gioco $\overline{G}$.

Poiché $X \subset U$ e $Y \subset V$ allora si ha:

$$f(x_i; y_j) = \varphi(x_i; y_j) = \max_{p \in U} \varphi(p; y_j) \ge$$
$$\max_{x \in X} \varphi(x; y_j) = \max_{x \in X} f(x; y_j) \quad \text{da cui} \quad f(x_i; y_j) = \max_{x \in X} f(x; y_j)$$

e, analogamente, $g(x_i; y_j) = \max_{y \in Y} g(x_i; y)$, da cui l'asserto.

Per "familiarizzare" con le ipotesi del teorema di Nash (la versione di questo teorema qui presentata), analizziamo alcuni esempi allo scopo di verificare se sono soddisfatte o meno le ipotesi del teorema.

ESEMPI:

1.3) $X = [1;2]$ $Y = [-1;1]$ $f(x; y) = -x^2 + xy$

$g(x; y) = 1 - e^{xy}$.

Ricordiamo che le ipotesi del teorema di Nash sono soddisfatte se:

a) X e Y sono compatti e convessi;

b) f e g sono continue;

c) $\forall y \in Y \;\; H_y : x \in X \to f(x;y)$ è concava e $\forall x \in X \;\; K_x : y \in Y \to g(x;y)$ è concava.

Tenuto conto che per ogni $y \in Y$ la funzione H_y è una funzione di una sola variabile, per la proposizione 3.1, basta mostrare che, per ogni $y \in Y$, $H_y^{''}(x) \leq 0$ in X, analogamente per la funzione K_x.

Nel nostro esempio si ha :

a) X e Y sono compatti e convessi;

b) f e g sono continue;

c) $\forall y \in Y \;\; H_y(x) = -x^2 + xy$, $H_y^{''}(x) = -2 < 0$, quindi $\forall y \in Y$ la funzione H_y è concava; analogamente

$\forall x \in X \;\; K_x(y) = 1 - e^{xy}$, $\quad K_x''(y) = -x^2 e^{xy} < 0$, quindi $\forall x \in X$ la funzione K_x è concava.

Si verificano le ipotesi del teorema di Nash.

2.3) $X = [-1;1]$ $Y = [-2;0]$ $f(x;y) = yx^2 + 2x$

$g(x;y) = y^2 + xy$.

Le (a) e (b) si verificano; $H_y''(x) = 2y \le 0 \;\; \forall y \in Y$ quindi $\forall y \in Y$ la funzione H_y è concava, ma $K_x''(y) = 2 > 0$, dunque K_x non è concava (è, addirittura, convessa). Dunque non si verificano le ipotesi del teorema di Nash.

3.3) $X = [0;1]$ $Y = \{(t;y) : t \in [-1;1], y \in [0;1]\}$

$f(x;t;y) = -x^2 + 2xt + y^2 + 3$

$g(x;t;y) = 2x^2 + 3xy - 4t^2 + 1$.

Le (a) e (b) si verificano; $H_{(t;y)}(x) = -x^2 + 2xt + y^2 + 3$ è una funzione della sola variabile *x*, inoltre $H''_{(t;y)}(x) = -2 < 0 \ \forall (t;y) \in Y$, dunque è concava. La funzione $K_x(t;y) = 2x^2 + 3xy - 4t^2 + 1$ è una funzione di due variabili; quindi, per verificare se è concava, dobbiamo utilizzare la prop. 3.2. Per semplificare le notazioni scriviamo $K(t;y)$ al posto di $K_x(t;y)$. Si ha: $K''_{tt}(t;y) = -8 < 0$ e $(K''_{tt}K''_{yy} - (K''_{ty})^2)(t;y) = 0$ per ogni $x \in X$, dunque è concava. Si verificano le ipotesi del teorema di Nash.

4.3) $X = \{(x;t) : x \in [0;1], t \in [-1;0]\}$

$Y = \{(z;y) : z \in [1;2], y \in [-1;1]\}$

$f(x;t;z;y) = -x^2 - 2xz - t^2 + zy$

$g(x;t;z;y) = -z^2 + 2xt + 1 - z + y$.

Le (a) e (b) si verificano; ad entrambe le funzioni definite da

$H_{(z;y)}(x;t)$ e $K_{(x;t)}(z;y)$

possiamo applicare la proposizione 3.2. Infatti usando notazioni "semplificate" analogamente a quanto fatto nell'esercizio immediatamente precedente , si ha:

$H''_{xx}(x;t) = -2 < 0, \quad (H''_{xx}H''_{tt} - (H''_{xt})^2)(x;t) = 4 > 0$

$\forall (z;y) \in Y$; $K''_{zz}(z;y) = -2 < 0, \; (K''_{zz}K''_{yy} - (K''_{zy})^2)(z;y) = 0$

$\forall (x;t) \in X$. Si verificano le ipotesi del teorema di Nash

ESERCIZI PROPOSTI

Vedere se si verificano le ipotesi del teorema di Nash nei seguenti casi:

1) $X = [-1;0]$ $Y = [1;2]$ $f(x;y) = -x^2 + y^2$

$g(x;y) = -x \log y + x^2$

S:si

2) $X = [2;3]\ Y = [0;1]\ \ f(x;y) = \sqrt{x^2 + y}$

$g(x;y) = xy$

S:no (H_y **non è concava)**

3) $X = [0;1]\ Y = [0;2]\ \ f(x;y) = -x^3 + xy^2$

$g(x;y) = -y^3 + 2x$

S:si

4) $X = [0;1]\ Y = \{(t;y) : t \in [-2;0], y \in [-1;1]\}$

$f(x;t;y) = 2x^2 + 3xy - 4t^2$

$g(x;t;y) = -x^2 + t^2 - 4y^2 + 1$

S:no (H_y e K_x **non sono concave)**

5) Mostrare che negli esercizi proposti del paragrafo 2.1 solo nei numeri 2, 5, 6 e 28 sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Nash.

6) Mostrare qualche esempio di gioco, nel caso di X e Y infiniti, che pur non verificando le ipotesi del teorema di Nash, ammetta equilibri di Nash. (Sugg.: vedere gli esercizi proposti precedenti e quelli del paragrafo 2.1).

Esponiamo, adesso, usando le notazioni del capitolo precedente, la dimostrazione della **proposizione 2.1**.

Poniamo $M = \max\{c_i \ \text{tali che}\ i \in \{1,...,n\}\}$ e $J = \{i \in \{1,...,n\}\ \text{tali che}\ c_i = M\}$. Ovviamente l'insieme J è non vuoto.

Distinguiamo tre casi: M <0, M =0 e M >0.

Sia M <0.

Allora, per ogni $x \in A$, risulta:

$$c_1 x_1 + ... + c_n x_n + c_{n+1} \leq c_{n+1}.$$

Da ciò e dal fatto che nell'origine O la funzione $\tau(x) = (cx + c_{n+1})$ vale c_{n+1} si deduce che il punto O è punto di massimo.

E' facile constatare che negli altri punti di V la funzione suddetta è minore di c_{n+1} e quindi $W = \{O\}$.

Allora, per avere la tesi, ci basta provare che O è l'unico punto di massimo, ma ciò è evidente poiché, essendo $M<0$, si ha:

$$c_1x_1 + ... + c_nx_n + c_{n+1} = c_{n+1} \Leftrightarrow x_1 = ... = x_n = 0.$$

Sia $M=0$.

Allora, per ogni $x \in A$, risulta ancora:

$$c_1x_1 + ... + c_nx_n + c_{n+1} \leq c_{n+1}.$$

E' facile verificare che tra i punti di V la funzione $\tau(x) = (cx + c_{n+1})$ vale c_{n+1} in O e nei punti A_r con $r \in J$. Si deduce che W è l'insieme $\{O, A_r \text{ tali che } r \in J\}$ e che tali punti sono punti di massimo. Siano $A_{r_1},..., A_{r_h}$ i punti di W distinti da O e $\beta_1,...,\beta_{h+1}$ numeri non negativi e tali che $\sum_{i=1}^{h+1} \beta_i = 1.$ Calcoliamo il valore della funzione $\tau(x) = (cx + c_{n+1})$ nel punto $P = \beta_1 A_{r_1} + ... + \beta_h A_{r_h} + \beta_{h+1} O$:

$$c_{r_1}\beta_1 + c_{n+1}\beta_1 + c_{r_2}\beta_2 + c_{n+1}\beta_2 + \ldots + c_{r_h}\beta_h + c_{n+1}\beta_h + $$
$$+ c_{n+1}\beta_{h+1} = c_{n+1}$$

perché $r \in J \Rightarrow c_r = M = 0$ e perché $\sum_{i=1}^{h+1} \beta_i = 1$.

Se ne deduce che P è punto di massimo.

Inversamente sia $P = (x_1, ..., x_n)$ un punto di massimo.

Allora $c_1 x_1 + ... + c_n x_n + c_{n+1} = c_{n+1}$ da cui $c_1 x_1 + ... + c_n x_n = 0$

e, quindi, dalla definizione di J e da M =0, $\sum_{i \notin J} c_i x_i = 0$.

Poiché $x_i \geq 0$ per ogni $i \in \{1, ..., n\}$ se $c_i < 0 \ \forall\, i \notin J$,

quest'ultima uguaglianza implica $x_i = 0$ per ogni $i \notin J$.

Allora $P = \sum_{i \in J} x_i A_i$ e, poiché, ovviamente, $P \in A$, $\sum_{i \in J} x_i \leq 1$

cioè $1 - \sum_{i \in J} x_i \geq 0$. Dunque, da $P = \sum_{i \in J} x_i A_i + (1 - \sum_{i \in J} x_i) \cdot O$,

segue la tesi.

Sia M >0.

Allora, per ogni $x \in A$, si ha:

$$c_1x_1+\ldots+c_nx_n+c_{n+1}\le Mx_1+\ldots+Mx_n+c_{n+1}=$$

$$=M(x_1+\ldots+x_n)+c_{n+1}\le M+c_{n+1}.$$

Ragionando come nei precedenti casi, si constata agevolmente che W è costituito dai punti A_r con $r\in J$, che detti punti sono punti di massimo e che detti $A_1,\ldots,A_h$ i punti di W e $\beta_1,\ldots,\beta_h$ numeri non negativi tali che $\sum_{i=1}^{h}\beta_i=1$, il punto $P=\sum_{i=1}^{h}\beta_iA_i$ è punto di massimo.

Inversamente sia $P=(x_1,\ldots,x_n)$ un punto di massimo.

Allora $c_1x_1+\ldots+c_nx_n+c_{n+1}=M+c_{n+1}$ da cui

$c_1x_1+\ldots+c_nx_n=M$.

Se esistesse $i\notin J$ con $\mathrm{x}_\mathrm{i}>0$ allora si avrebbe che, scelto $k\in J$, detto Q il punto $(y_1,\ldots,y_n)$ tale che

$$y_j=\begin{cases} x_j \text{ se } j\notin\{i,k\} \\ 0 \text{ se } j=i \\ x_k+x_i \text{ se } j=k \end{cases}$$

si avrebbe che $Q \in A$ perché $P \in A$ e che, tenuto conto di $c_i < M$ e $c_k = M$,

$c_1 y_1 + ... + c_n y_n + c_{n+1} = c_1 x_1 + ... + c_n x_n + c_{n+1} + c_k x_i - c_i x_i =$

$= M + c_{n+1} + x_i (M - c_i) > M + c_{n+1}$ contro il fatto che $M + c_{n+1}$ è il massimo.

Dunque $x_i = 0$ per ogni $i \notin J$.

La tesi ora segue procedendo come nel caso precedente.

Concludiamo questo libretto presentando un modo per determinare gli equilibri di Nash in strategie miste nel caso particolare in cui entrambi gli insiemi X e Y sono costituiti da due strategie (pure). Sia

$$\begin{pmatrix} (a_{11};b_{11}) & (a_{12};b_{12}) \\ (a_{21};b_{21}) & (a_{22};b_{22}) \end{pmatrix}$$

la matrice che definisce il gioco.

Le funzioni φ e ψ sono date da:

$$\varphi(p;q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})p_1 q_1 + \\ + (a_{12} - a_{22})p_1 + (a_{21} - a_{22})q_1 + a_{22} \quad \text{e}$$

$$\psi(p;q) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p_1 q_1 + \\ + (b_{12} - b_{22})p_1 + (b_{21} - b_{22})q_1 + b_{22}.$$

Poniamo $\alpha = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$,

$\gamma = a_{22} - a_{12}$, $\beta = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\delta = b_{22} - b_{21}$ e siano

ρ_i, con $i \in N$ e $1 \le i \le 9$, le parti del piano cartesiano $\alpha O \gamma$

definite come nella figura 3.1 (analoga rappresentazione vale

per τ_i, con $i \in N$ e $1 \le i \le 9$, nel piano $\beta O \delta$ con β, δ e τ_i al

posto rispettivamente di α, γ e ρ_i). A questo punto riportiamo

i risultati in tutti i casi possibili; per non “appesantire”

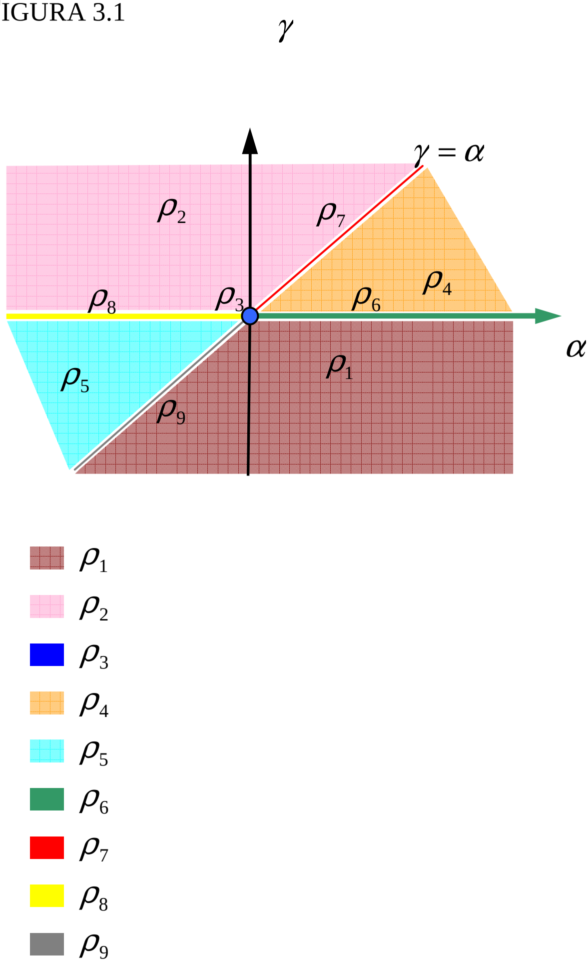
ulteriormente le pagine che seguono, abbiamo indicato gli

equilibri di Nash in strategie miste non come sarebbe stato

corretto e cioè nella forma $((p_1, 1 - p_1), (q_1, 1 - q_1))$ ma nella

forma più breve (p_1, q_1).

FIGURA 3.1



γ
$\gamma = \alpha$
α
ρ_1
ρ_2
ρ_3
ρ_4
ρ_5
ρ_6
ρ_7
ρ_8
ρ_9

$$\rho_1 \cap \tau_1 \Rightarrow S = \{(1;1)\}.$$

$$\rho_1 \cap \tau_2 \Rightarrow S = \{(1;0)\}.$$

$$\rho_1 \cap \tau_3 \Rightarrow S = \{1\} \times [0;1].$$

$$\rho_1 \cap \tau_4 \Rightarrow S = \{(1;1)\}.$$

$$\rho_1 \cap \tau_5 \Rightarrow S = \{(1;0)\}.$$

$$\rho_1 \cap \tau_6 \Rightarrow S = \{(1;1)\}.$$

$$\rho_1 \cap \tau_7 \Rightarrow S = \{1\} \times [0;1].$$

$$\rho_1 \cap \tau_8 \Rightarrow S = \{(1;0)\}.$$

$$\rho_1 \cap \tau_9 \Rightarrow S = \{1\} \times [0;1].$$

$$\rho_2 \cap \tau_1 \Rightarrow S = \{(0;1)\}.$$

$$\rho_2 \cap \tau_2 \Rightarrow S = \{(0;0)\}.$$

$$\rho_2 \cap \tau_3 \Rightarrow S = \{0\} \times [0;1].$$

$$\rho_2 \cap \tau_4 \Rightarrow S = \{(0;0)\}.$$

$$\rho_2 \cap \tau_5 \Rightarrow S = \{(0;1)\}.$$

$$\rho_2 \cap \tau_6 \Rightarrow S = \{0\} \times [0;1].$$

$$\rho_2 \cap \tau_7 \Rightarrow S = \{(0;0)\}.$$

$$\rho_2 \cap \tau_8 \Rightarrow S = \{0\} \times [0;1].$$

$$\rho_2 \cap \tau_9 \Rightarrow S = \{(0;1)\}.$$

$$\rho_3 \cap \tau_1 \Rightarrow S = [0;1] \times \{1\}.$$

$$\rho_3 \cap \tau_2 \Rightarrow S = [0;1] \times \{0\}.$$

$$\rho_3 \cap \tau_3 \Rightarrow S = [0;1] \times [0;1].$$

$$\rho_3 \cap \tau_4 \Rightarrow S = \left] \frac{\delta}{\beta};1 \right] \times \{1\} \cup$$

$$\cup \left\{ \frac{\delta}{\beta} \right\} \times [0;1] \cup \left[0; \frac{\delta}{\beta} \right[\times \{0\}.$$

$$\rho_3 \cap \tau_5 \Rightarrow S = \left[0; \frac{\delta}{\beta} \right[\times \{1\} \cup$$

$$\cup \left\{ \frac{\delta}{\beta} \right\} \times [0;1] \cup \left] \frac{\delta}{\beta};1 \right] \times \{0\}.$$

$$\rho_3 \cap \tau_6 \Rightarrow S = \{0\} \times [0;1] \cup]0;1] \times \{1\}.$$

$$\rho_3 \cap \tau_7 \Rightarrow S = [0;1[\times \{0\} \cup \{1\} \times [0;1].$$

$$\rho_3 \cap \tau_8 \Rightarrow S = \{0\} \times [0;1] \cup]0;1] \times \{0\}.$$

$$\rho_3 \cap \tau_9 \Rightarrow S = [0;1[\times \{1\} \cup \{1\} \times [0;1].$$

$$\rho_4 \cap \tau_1 \Rightarrow S = \{(1;1)\}.$$

$$\rho_4 \cap \tau_2 \Rightarrow S = \{(0;0)\}.$$

$$\rho_4 \cap \tau_3 \Rightarrow S = \{0\} \times \left[0; \frac{\gamma}{\alpha}\right[\cup$$

$$[0;1] \times \left\{\frac{\gamma}{\alpha}\right\} \cup \{1\} \times \left]\frac{\gamma}{\alpha};1\right].$$

$$\rho_4 \cap \tau_4 \Rightarrow S = \left\{(0;0); \left(\frac{\delta}{\beta}; \frac{\gamma}{\alpha}\right); (1;1)\right\}.$$

$$\rho_4 \cap \tau_5 \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{\delta}{\beta}; \frac{\gamma}{\alpha}\right)\right\}.$$

$$\rho_4 \cap \tau_6 \Rightarrow S = \{(1;1)\} \cup \{0\} \times \left[0; \frac{\gamma}{\alpha}\right].$$

$$\rho_4 \cap \tau_7 \Rightarrow S = \{(0;0)\} \cup \{1\} \times \left[\frac{\gamma}{\alpha};1\right].$$

$$\rho_4 \cap \tau_8 \Rightarrow S = \{0\} \times \left[0;\frac{\gamma}{\alpha}\right].$$

$$\rho_4 \cap \tau_9 \Rightarrow S = \{1\} \times \left[\frac{\gamma}{\alpha};1\right].$$

$$\rho_5 \cap \tau_1 \Rightarrow S = \{(0;1)\}.$$

$$\rho_5 \cap \tau_2 \Rightarrow S = \{(1;0)\}.$$

$$\rho_5 \cap \tau_3 \Rightarrow S = \{0\} \times \left[\frac{\gamma}{\alpha};1\right] \cup$$

$$]0;1[\times \left\{\frac{\gamma}{\alpha}\right\} \cup \{1\} \times \left[0;\frac{\gamma}{\alpha}\right].$$

$$\rho_5 \cap \tau_4 \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{\delta}{\beta};\frac{\gamma}{\alpha}\right)\right\}.$$

$$\rho_5 \cap \tau_5 \Rightarrow S = \left\{(0;1);\left(\frac{\delta}{\beta};\frac{\gamma}{\alpha}\right);(1;0)\right\}.$$

$$\rho_5 \cap \tau_6 \Rightarrow S = \{0\} \times \left[\frac{\gamma}{\alpha}; 1 \right].$$

$$\rho_5 \cap \tau_7 \Rightarrow S = \{1\} \times \left[0; \frac{\gamma}{\alpha} \right].$$

$$\rho_5 \cap \tau_8 \Rightarrow S = \{0\} \times \left[\frac{\gamma}{\alpha}; 1 \right] \cup \{(1;0)\}.$$

$$\rho_5 \cap \tau_9 \Rightarrow S = \{(0;1)\} \cup \{1\} \times \left[0; \frac{\gamma}{\alpha} \right].$$

$$\rho_6 \cap \tau_1 \Rightarrow S = \{(1;1)\}.$$

$$\rho_6 \cap \tau_2 \Rightarrow S = [0;1] \times \{0\}.$$

$$\rho_6 \cap \tau_3 \Rightarrow S = [0;1[\times \{0\} \cup \{1\} \times [0;1].$$

$$\rho_6 \cap \tau_4 \Rightarrow S = \left[0; \frac{\delta}{\beta} \right] \times \{0\} \cup \{(1;1)\}.$$

$$\rho_6 \cap \tau_5 \Rightarrow S = \left[\frac{\delta}{\beta}; 1 \right] \times \{0\}.$$

$$\rho_6 \cap \tau_6 \Rightarrow S = \{(0;0); (1;1)\}.$$

$$\rho_6 \cap \tau_7 \Rightarrow S = [0;1[\times\{0\}\cup\{1\}\times[0;1].$$

$$\rho_6 \cap \tau_8 \Rightarrow S = [0;1]\times\{0\}.$$

$$\rho_6 \cap \tau_9 \Rightarrow S = \{1\}\times[0;1].$$

$$\rho_7 \cap \tau_1 \Rightarrow S = [0;1]\times\{1\}.$$

$$\rho_7 \cap \tau_2 \Rightarrow S = \{(0;0)\}.$$

$$\rho_7 \cap \tau_3 \Rightarrow S = \{0\}\times[0;1]\cup\,]0;1]\times\{1\}.$$

$$\rho_7 \cap \tau_4 \Rightarrow S = \{(0;0)\}\cup\left[\frac{\delta}{\beta};1\right]\times\{1\}.$$

$$\rho_7 \cap \tau_5 \Rightarrow S = \left[0;\frac{\delta}{\beta}\right]\times\{1\}.$$

$$\rho_7 \cap \tau_6 \Rightarrow S = \{0\}\times[0;1]\cup\,]0;1]\times\{1\}.$$

$$\rho_7 \cap \tau_7 \Rightarrow S = \{(0;0);(1;1)\}.$$

$$\rho_7 \cap \tau_8 \Rightarrow S = \{0\}\times[0;1].$$

$$\rho_7 \cap \tau_9 \Rightarrow S = [0;1]\times\{1\}.$$

$$\rho_8 \cap \tau_1 \Rightarrow S = \{(0;1)\}.$$

$$\rho_8 \cap \tau_2 \Rightarrow S = [0;1] \times \{0\}.$$

$$\rho_8 \cap \tau_3 \Rightarrow S = \{0\} \times [0;1] \cup]0;1] \times \{0\}.$$

$$\rho_8 \cap \tau_4 \Rightarrow S = \left[0;\frac{\delta}{\beta}\right] \times \{0\}.$$

$$\rho_8 \cap \tau_5 \Rightarrow S = \{(0;1)\} \cup \left[\frac{\delta}{\beta};1\right] \times \{0\}.$$

$$\rho_8 \cap \tau_6 \Rightarrow S = \{0\} \times [0;1].$$

$$\rho_8 \cap \tau_7 \Rightarrow S = [0;1] \times \{0\}.$$

$$\rho_8 \cap \tau_8 \Rightarrow S = \{0\} \times [0;1] \cup]0;1] \times \{0\}.$$

$$\rho_8 \cap \tau_9 \Rightarrow S = \{(0;1);(1;0)\}.$$

$$\rho_9 \cap \tau_1 \Rightarrow S = [0;1] \times \{1\}.$$

$$\rho_9 \cap \tau_2 \Rightarrow S = \{(1;0)\}.$$

$$\rho_9 \cap \tau_3 \Rightarrow S = [0;1[\times \{1\} \cup \{1\} \times [0;1].$$

$$\rho_9 \cap \tau_4 \Rightarrow S = \left[\frac{\delta}{\beta};1\right] \times \{1\}.$$

$$\rho_9 \cap \tau_5 \Rightarrow S = \left[0;\frac{\delta}{\beta}\right] \times \{1\} \cup \{(1;0)\}.$$

$$\rho_9 \cap \tau_6 \Rightarrow S = [0;1] \times \{1\}.$$

$$\rho_9 \cap \tau_7 \Rightarrow S = \{1\} \times [0;1].$$

$$\rho_9 \cap \tau_8 \Rightarrow S = \{(0;1);(1;0)\}.$$

$$\rho_9 \cap \tau_9 \Rightarrow S = [0;1[\times \{1\} \cup \{1\} \times [0;1].$$

Risolviamo, adesso, gli esercizi proposti 1,2,3 e 4 del Capitolo 2, usando l'ultimo metodo esposto.

Per quanto riguarda l'esercizio 1 si ha: $\alpha = 1, \gamma = 0, \beta = 1, \delta = 0.$

Da ciò e dalla figura 3.1 si deduce che il risultato va cercato nella tabella in corrispondenza di $\rho_6 \cap \tau_6$. Così si ritrova il risultato dato nel Capitolo 2. Analogamente si ritrovano i risultati dati nel Capitolo 2 tenendo conto che:

per quanto riguarda l'esercizio 2 risulta:

$\alpha = -3, \gamma = -2, \beta = 4, \delta = 3$ e quindi interessa il caso $\rho_5 \cap \tau_4$;

per quanto riguarda l'esercizio 3 risulta:

$\alpha = 0, \gamma = 1, \beta = 1, \delta = 0$ e quindi interessa il caso $\rho_2 \cap \tau_6$;

per quanto riguarda l'esercizio 4 risulta:

$\alpha = 0, \gamma = 0, \beta = 2, \delta = 0$ e quindi interessa il caso $\rho_3 \cap \tau_6$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

AVERSA V. "Metodi quantitativi delle decisioni", Ed. Liguori.

COSTA G.- MORI P.A. "Introduzione alla teoria dei giochi", Ed. il Mulino.

GAMBARELLI G. "Giochi Competitivi e Cooperativi", Hoepli.

GIBBONS R. "Teoria dei giochi", Ed. il Mulino.

LI CALZI M. "Teoria dei giochi", Ed. ETAS.