DA THABIT A CARNOT AL TEOREMA DEI SENI

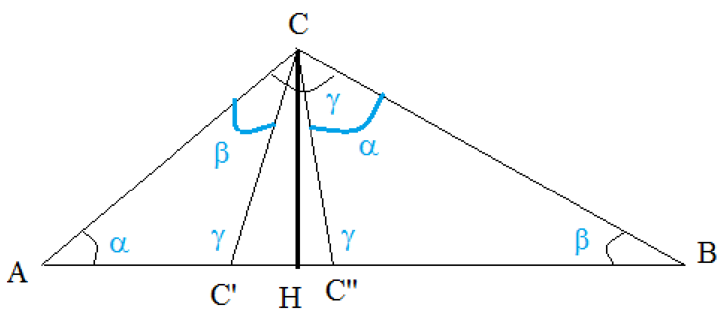
Abul Hassan Thabit Ibn Qurra Marwan al-Harrani nacqua ad Harran (Mesopotamia) nell' 836 e morì a Bagdad nel 901

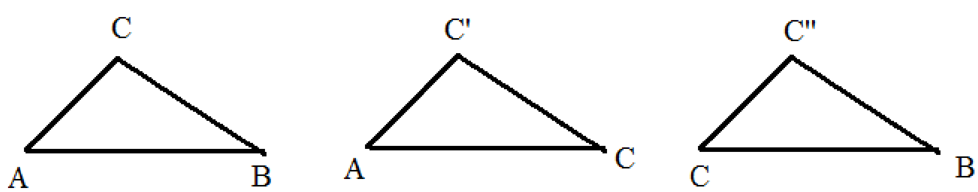
Il teorema che esporremo fu scoperto nel 1953 in Turchia nella biblioteca del Museo di Aya Sofia. Fece la sua prima comparsa europea nel 1685 con John Wallis .

Teorema generalizzante il teorema di Pitagora

In un triangolo generico vale la relazione seguente $AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AC' + BC'')$

Dimostrazione . Nel triangolo ABC acuto in C , tracciamo CC ' e CC" in modo che ABC , ACC ' e CBC" siano simili





Dalla similitudine ABC con ACC' abbiamo AB : AC = AC : AC' = BC : CC' $\Rightarrow$
$AC^2 = AB \cdot AC'$ *e* $AC \cdot BC = AB \cdot CC'$
Dalla similitudine ABC con CBC " abbiamo AB : BC = AC : AC' = BC : BC' $\Rightarrow$
$BC^2 = AB \cdot BC''$ *e* $AC \cdot BC = AB \cdot CC''$

Sommando i risultati otteniamo la formula che generalizza la relazione pitagorica
$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AC' + BC'')$ *e* *l'uguaglianza* $CC' = CC''$

Poichè dalla figura risulta $AB - C'C'' = AC' + BC''$ segue

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 - AB \cdot C'C'' \qquad (1)$$

♥

Riscrivendo opportunamente la (1) otteniamo una relazione nota come **Teorema del coseno o di Carnot.**

Dalla figura segue $C'C'' = 2\,CC' \cos(\pi - \gamma) = -\,2\,CC' \cos\gamma$ (perchè $\cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma$ essendo γ angolo ottuso)

Sostituendo nella (1) otteniamo $AC^2 + BC^2 = AB^2 + 2\,AB \cdot CC' \cdot \cos\gamma$

$AC^2 + BC^2 = AB^2 + 2\,AC \cdot BC \cdot \cos\gamma$ (perché AB * CC' = AC * BC come dimostrato sopra)

da cui segue la formula di Carnot per AB :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC \cdot BC \cdot \cos\gamma \qquad (2)$$

AB non è un lato speciale , la formula vale per tutti e tre i lati.

Infatti dalla (2) segue $AC^2 + AB^2 = 2\,AB^2 - BC^2 + 2\,AC \cdot BC \cdot \cos\gamma$

$$\begin{aligned} AC^2 + AB^2 &= BC^2 + 2\,[AB^2 - BC^2 + AC \cdot BC \cdot \cos\gamma\,] \\ &= BC^2 + 2\,[AB^2 - AB \cdot BC'' + AB \cdot CC' \cos\gamma] \\ &= BC^2 + 2 \cdot AB \cdot [AC'' + CC' \cos\gamma] \end{aligned}$$

La quantità $AC'' + CC' \cos\gamma$ è semplificabile nella forma

$AH + \dfrac{C'C''}{2} - CC' \cos(\pi - \gamma) = AH + C'H - C'H = AH = AC \cdot \cos\alpha$

Sostituendo otteniamo Carnot per il lato BC

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$$

teorema del coseno o di Carnot : In ogni triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati

degli altri due lati a cui è sottratto il loro doppio prodotto

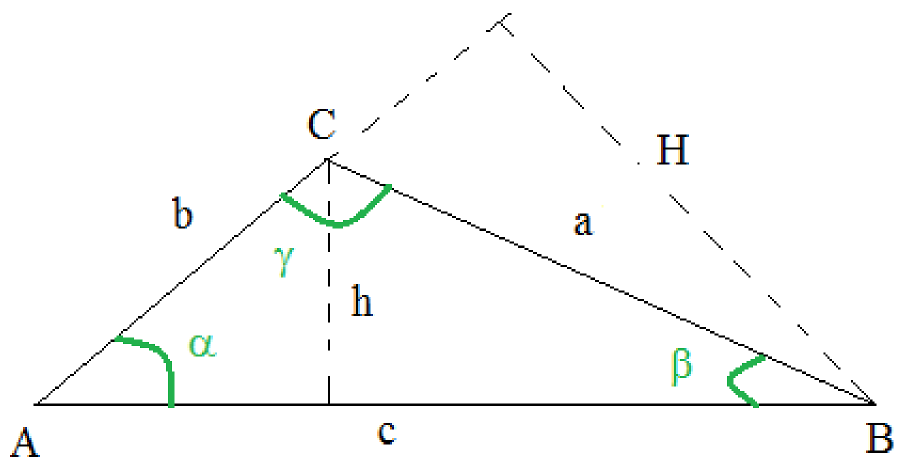
moltiplicato per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

Nello studio dei triangoli oltre a Carnot è molto utile un secondo teorema noto come **teorema dei seni**

In ogni triangolo il rapporto tra il lato e il seno dell'angolo opposto è costante.

In formula $\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$

Dimostrazione. Dalla figura



seguono le uguaglianze $h = b \cdot sen\,\alpha = a \cdot sen\,\beta$ e $H = c \cdot sen\,\alpha = a \cdot sen\,(\pi - \gamma)$

da cui prendendo a coppie e ricordando **che** $sen\,(\pi - \gamma) = sen\,\gamma$ segue la tesi.