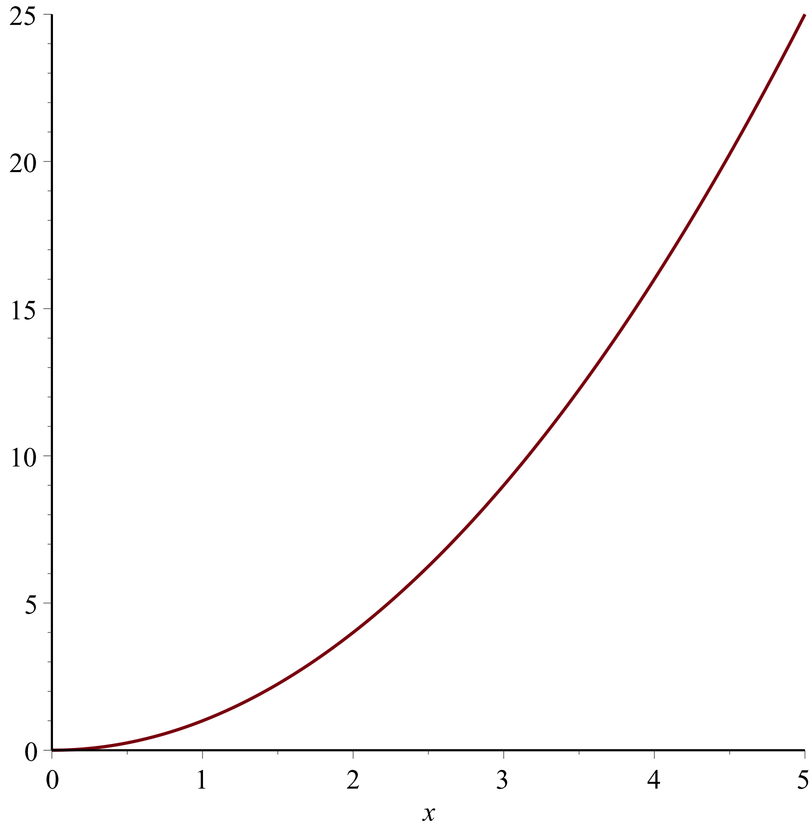
DISCORSI SULLA PARABOLA

1. COME SI CALCOLA L'AREA DI UN TRIANGOLOIDE DI PARABOLA

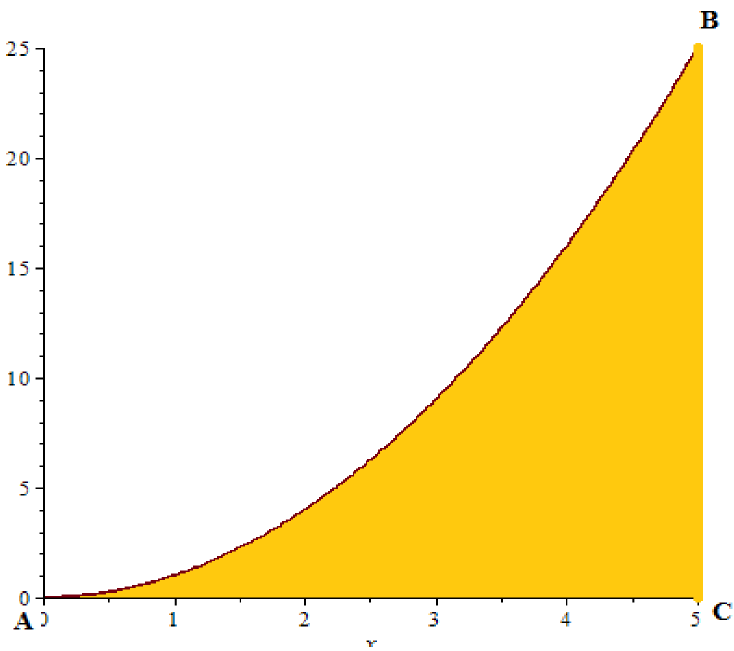
Data la parabola $y = x^2$

$with(plots):$

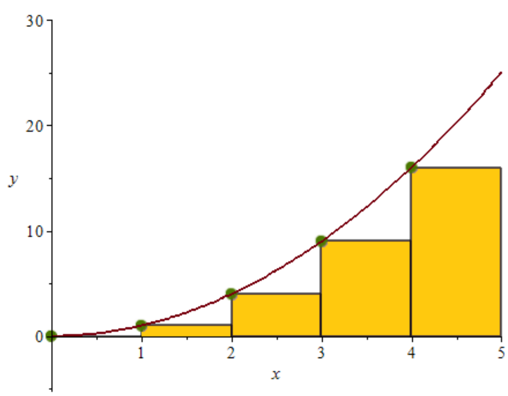
$plot(x^2, x = 0..5)$



vogliamo calcolare l'area S del triangoloide di vertici $A(0, 0)$ $B(5, 25)$ $C(5, 0)$

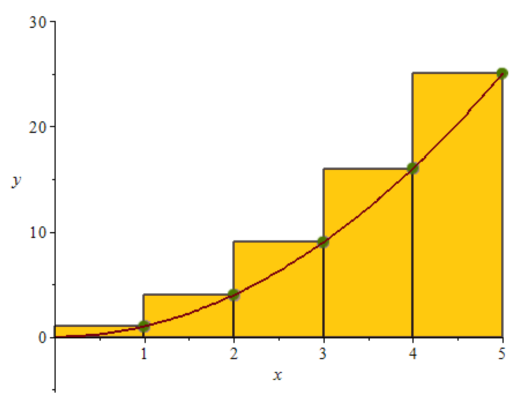


Per cominciare possiamo cercare di approssimare quest'area suddividendo l'intervallo in 5 parti e costruendo dei rettangoli . Le possibilità sono due perchè in ogni intervallo possiamo prendere come altezza (del rettangolo) il valore della funzione nell'estremo destro o sinistro.



Area per difetto

(ogni rettangolo ha come altezza il valore della funzione nell'estremo sinistro)



Area per eccesso

(ogni rettangolo ha come altezza il valore della funzione nell'estremo destro)

Calcolato il valore della funzione in ogni estremo degli intervalli avremo :

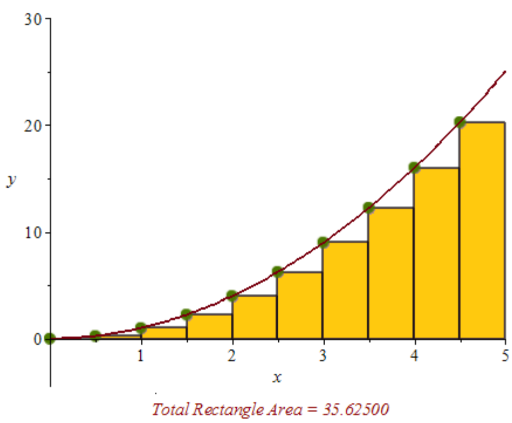
	1	2
1	x	y = x^2
2	0	0
3	1	1
4	2	4
5	3	9
6	4	16
7	5	25

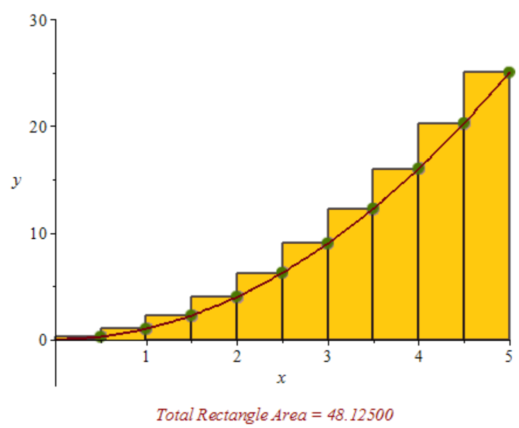
Area per difetto $S_{1\,m} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 16 = 30$

Area per eccesso $S_{1\,M} = 1 \cdot 1 + 1 + 4 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 25 = 55$

Abbiamo ottenuto come primo risultato che $S_{1\,m} < S < S_{1\,M}$

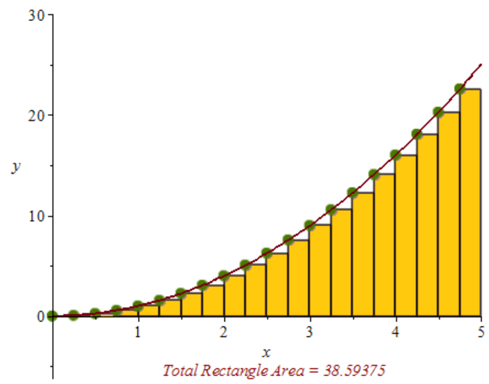
Naturalmente possiamo migliorare l'approssimazione suddividendo l'intervallo in 10 parti di ampiezza $\frac{1}{2}$ calcolare i nuovi valori della funzione e successivamente $S_{\frac{1}{2}m}$ e $S_{\frac{1}{2}M}$ ottenendo :

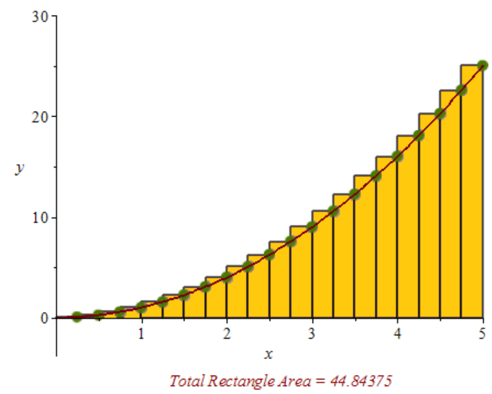




$$S_{1\,m} < S_{\frac{1}{2}m} < S < S_{\frac{1}{2}M} < S_{1\,M}$$

Continuando nelle approssimazioni suddividiamo l'intervallo in 20 parti di ampiezza $\frac{1}{4}$





$$S_{1\,m} < S_{\frac{1}{2}m} < S_{\frac{1}{4}m} < S < S_{\frac{1}{4}M} < S_{\frac{1}{2}M} < S_{1\,M}$$

E' chiaro che suddividendo con ampiezze sempre minori della forma $\frac{1}{2^n}$ avremo sempre migliori approssimazioni dell'area S cercata e intuitivamente

" l'area S si avrà quando n sarà uguale ad infinito . A quel punto $S_{\infty m} \equiv S \equiv S_{\infty M}$ "

Volendo generalizzare la procedura scegliamo un generico indice n :

l'intervallo [0,5] sarà suddiviso in 2^n sottointervalli di ampiezza $\frac{5}{2^n}$

per ogni sottointervallo occorre calcolare il valore della funzione nell'estremo di sinistra e in quello di destra

si calcolano le aree $S_{\frac{1}{2^n}m}$ e $S_{\frac{1}{2^n}M}$ ottenendo approssimazioni sempre più accurate

Esempio n=5

ampiezza intervallo $\delta = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32}$

valori x in cui calcolare la funzione x^2

$0, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{15}{32}, \frac{20}{32}, \frac{25}{32}, \frac{30}{32}, \frac{35}{32}, \frac{40}{32}, \frac{45}{32}, \frac{50}{32}, \frac{55}{32}, \frac{60}{32}, \frac{65}{32}, \frac{70}{32}, \frac{75}{32}, \frac{80}{32}, \frac{85}{32}, \frac{90}{32}, \frac{95}{32}, \frac{100}{32}, \frac{105}{32}, \frac{110}{32}, \frac{115}{32}, \frac{120}{32}, \frac{125}{32}, \frac{130}{32}, \frac{135}{32}, \frac{140}{32}, \frac{145}{32}, \frac{150}{32}, \frac{155}{32}, \frac{160}{32}$

calcolo somma per difetto (nella formula ho raccolto l'ampiezza che è sempre 5/32)

$$S_{\frac{1}{32}m} = \frac{5}{32} \cdot \left(0^2 + \left(\frac{5}{32}\right)^2 + \left(\frac{10}{32}\right)^2 + \left(\frac{15}{32}\right)^2 + \left(\frac{20}{32}\right)^2 + \left(\frac{25}{32}\right)^2 + \left(\frac{30}{32}\right)^2 + \left(\frac{35}{42}\right)^2 + \left(\frac{40}{32}\right)^2 + \left(\frac{45}{32}\right)^2 + \left(\frac{50}{32}\right)^2 + \left(\frac{55}{32}\right)^2 + \left(\frac{60}{32}\right)^2 + \left(\frac{65}{32}\right)^2 + \left(\frac{70}{32}\right)^2 + \left(\frac{75}{32}\right)^2 + \left(\frac{80}{32}\right)^2 + \left(\frac{85}{32}\right)^2 + \left(\frac{90}{32}\right)^2 + \left(\frac{95}{32}\right)^2 + \left(\frac{100}{32}\right)^2 + \left(\frac{105}{32}\right)^2 + \left(\frac{110}{32}\right)^2 + \left(\frac{115}{32}\right)^2 + \left(\frac{120}{32}\right)^2 + \left(\frac{125}{32}\right)^2 + \left(\frac{130}{32}\right)^2 + \left(\frac{135}{32}\right)^2 + \left(\frac{140}{32}\right)^2 + \left(\frac{145}{32}\right)^2 + \left(\frac{150}{32}\right)^2 + \left(\frac{155}{32}\right)^2\right)$$

$$S_{\frac{1}{32}m} = \frac{11694875}{294912} \tag{1}$$

$$S_{\frac{1}{32}M} = \frac{5}{32} \cdot \left(\left(\frac{5}{32}\right)^2 + \left(\frac{10}{32}\right)^2 + \left(\frac{15}{32}\right)^2 + \left(\frac{20}{32}\right)^2 + \left(\frac{25}{32}\right)^2 + \left(\frac{30}{32}\right)^2 + \left(\frac{35}{42}\right)^2 + \left(\frac{40}{32}\right)^2 + \left(\frac{45}{32}\right)^2 + \left(\frac{50}{32}\right)^2 + \left(\frac{55}{32}\right)^2 + \left(\frac{60}{32}\right)^2 + \left(\frac{65}{32}\right)^2 + \left(\frac{70}{32}\right)^2 + \left(\frac{75}{32}\right)^2 + \left(\frac{80}{32}\right)^2 + \left(\frac{85}{32}\right)^2 + \left(\frac{90}{32}\right)^2 + \left(\frac{95}{32}\right)^2 + \left(\frac{100}{32}\right)^2 + \left(\frac{105}{32}\right)^2 + \left(\frac{110}{32}\right)^2 + \left(\frac{115}{32}\right)^2 + \left(\frac{120}{32}\right)^2 + \left(\frac{125}{32}\right)^2 + \left(\frac{130}{32}\right)^2 + \left(\frac{135}{32}\right)^2 + \left(\frac{140}{32}\right)^2 + \left(\frac{145}{32}\right)^2 + \left(\frac{150}{32}\right)^2 + \left(\frac{155}{32}\right)^2 + \left(\frac{160}{32}\right)^2\right)$$

$$S_{\frac{1}{32}M} = \frac{12846875}{294912} \tag{2}$$

$$S_{\frac{1}{32}m} := evalf\left(\frac{11694875}{294912}\right)$$

$$39.65547350 \tag{3}$$

$$S_{\frac{1}{32}M} := evalf\left(\frac{12846875}{294912}\right)$$

$$43.56172350 \tag{4}$$

Questa nuova approssimazione ci dice che l'area è un valore compreso tra 39.6554 e 43.5617

In effetti osservando meglio le relazioni (1) e (2) vediamo che possiamo riscriverle in altra forma poiché

$$\left(\frac{5}{32}\right)^2 = 1^2\cdot\left(\frac{5}{32}\right)^2 \quad , \quad \left(\frac{10}{32}\right)^2 = 2^2\cdot\left(\frac{5}{32}\right)^2 \quad , \quad ...... \quad , \quad \left(\frac{150}{32}\right)^2 = 30^2\cdot\left(\frac{5}{32}\right)^2 \quad ,$$

$$\left(\frac{155}{32}\right)^2 = 31^2\cdot\left(\frac{5}{32}\right)^2 \quad , \quad \left(\frac{160}{32}\right)^2 = 32^2\cdot\left(\frac{5}{32}\right)^2$$

$$S_{\frac{1}{32}m} = \left(\frac{5}{32}\right)^3\cdot\left(0^2+1^2+2^2+.......+31^2\right) \qquad \text{e}$$

$$S_{\frac{1}{32}M} = \left(\frac{5}{32}\right)^3\cdot\left(1^2+2^2+.......+31^2+32^2\right) \qquad \textbf{(5)}$$

Nelle (5) il problema è calcolare la somma dei quadrati dei primi 32 numeri naturali.

Fortunatamente si conosce la formula generale

$$1^2+2^2+3^2+.......+k^2 = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2\,k+1)}{6} \qquad \textbf{(6)}$$

Questo modo di scrivere le aree approssimate ci suggerisce le seguenti formule generali :

Se l'intervallo [0,5] è suddiviso in 2^n intervalli di ampiezza $\delta = \frac{5}{2^n}$ abbiamo :

$$S_{\frac{1}{2^n}m} = \left(\frac{5}{2^n}\right)^3\cdot\left(0^2+1^2+2^2+.....+\left(2^n-1\right)^2\right) = \left(\frac{5}{2^n}\right)^3 \cdot\frac{\left(2^n-1\right)\left(2^n-1+1\right)\left(2\cdot\left(2^n-1\right)+1\right)}{6} = \frac{5^3}{6}\cdot\left(2-\frac{3}{2^n}+\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

(7a)

$$S_{\frac{1}{2^n}M} = \left(\frac{5}{2^n}\right)^3\cdot\left(1^2+2^2+.....+\left(2^n-1\right)^2+2^n\right) = \left(\frac{5}{2^n}\right)^3\cdot\frac{\left(2^n\right)\left(2^n+1\right)\left(2\cdot 2^n+1\right)}{6} = \frac{5^3}{6}\cdot\left(2+\frac{3}{2^n}+\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

(7b)

Al crescere di n le frazioni con denominatore 2^n e 2^{2n} divengono sempre più piccole per cui le parentesi all'infinito sono uguali a 2 che semplificato con 6 .....
ci permette di trovare FINALMENTE ! l'area del triangoloide

$$S_{\infty m} = S_{\infty M} = S = \frac{5^3}{3}$$

Per ragioni che saranno chiarite più avanti si scrive (usando una notazione inventata da Leibniz) :

$$S = \int_0^5 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{5^3}{3}$$

(leggere "l'area S è l'integrale tra 0 e 5 della funzione $y = x^2$)
CONSEGUENZE ....

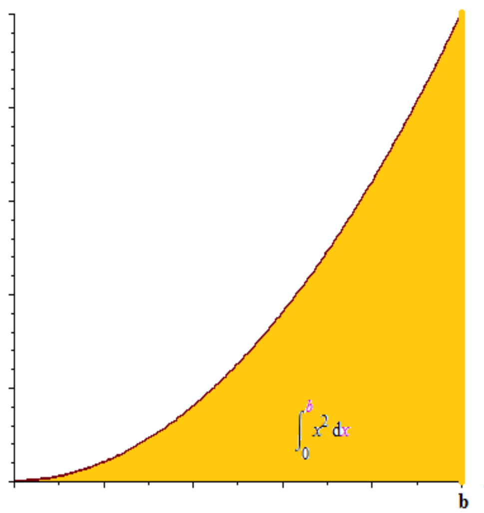
a) il 5 come valore destro nell'intervallo è ininfluente in tutto il discorso , per cui se b è un qualunque numero positivo avremo :

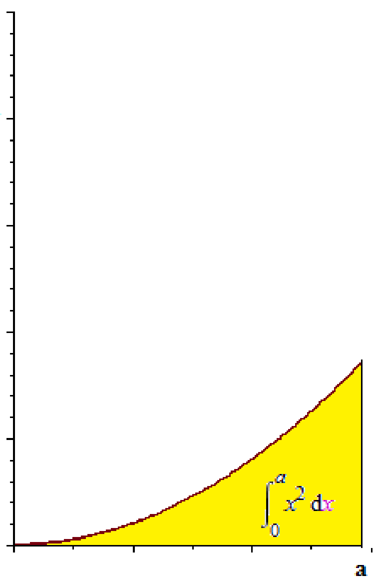
$$\int_0^b x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{b^3}{3} \qquad \textbf{(8)}$$

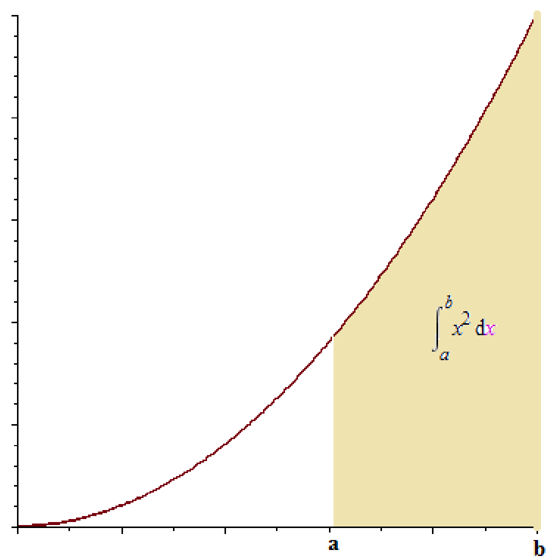
b) più in generale se $0 < a < b$

$$\int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{b^3 - a^3}{3} \qquad \textbf{(9)} \qquad \text{da cui} \qquad \int_a^a x^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

(l'area di un segmento è zero) **(10)**







AREA = AREA - AREA

ESERCIZI

1. Data la parabola $y = x^2$ nell'intervallo $[0, 10]$.

   a) dividere tale intervallo in 5 parti uguali e calcolare l'area per difetto e l'area per eccesso con il metodo dei rettangoli visto sopra

b) Calcolare $\int_{0}^{10} x^2 \mathrm{d}x$

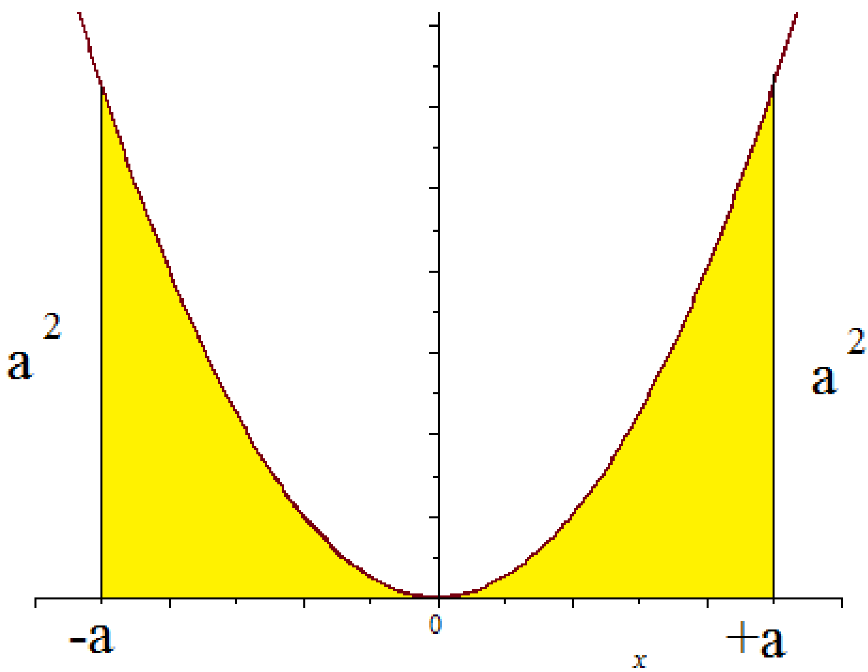
c) Calcolare $\int_{\frac{3}{2}}^{10} x^2 \, \mathrm{d}x$

2. CALCOLO DI ALTRE AREE

Esempio 1. Calcolare $\int_{-a}^{a} x^2 \mathrm{d}x$

Tracciando il diagramma della parabola

$plot(\, x^2, x = -a \,..a)$

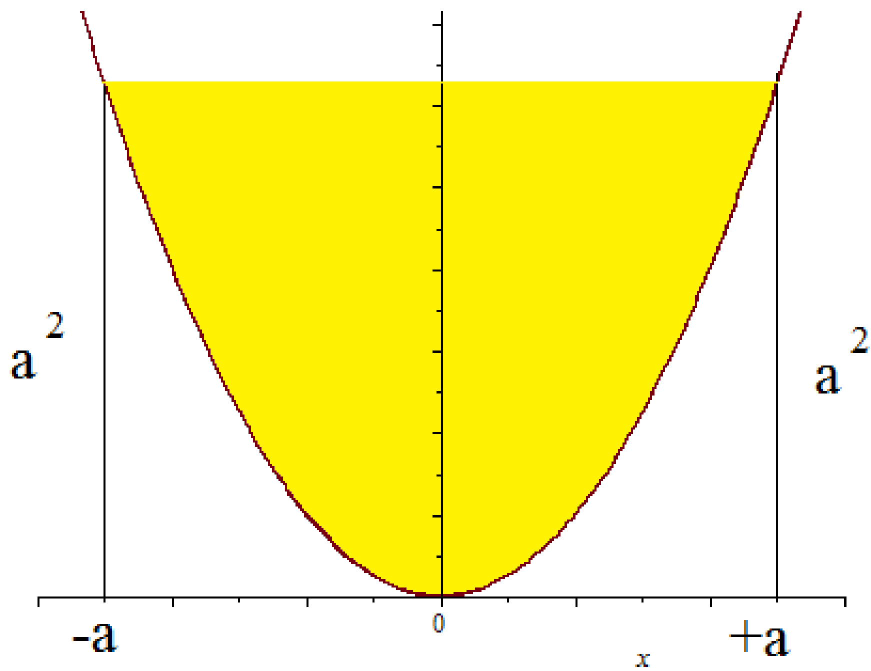


si vede che tale area è il doppio dell'area tra 0 e +a , per cui :

$$\int_{-a}^{+a} x^2 \, dx = 2 \int_0^a x^2 dx = 2 \frac{a^3}{3}$$

(11)

Esempio 2 Calcolare l' area in figura

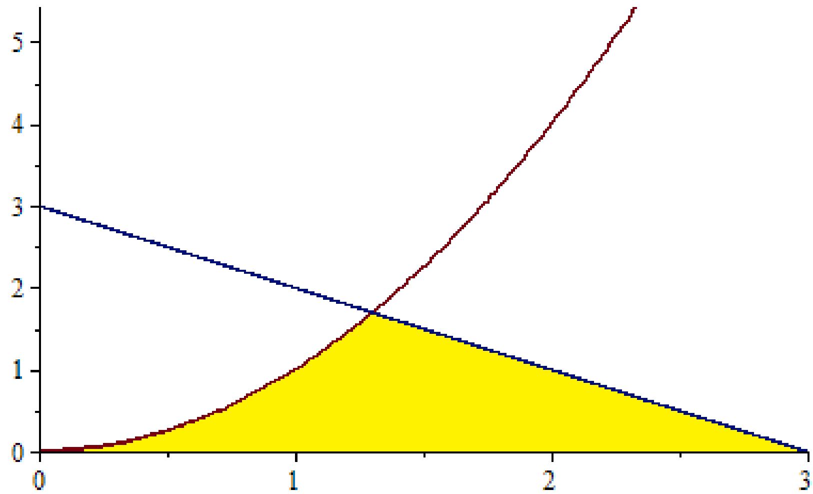


Basta togliere all'area del rettangolo di lati **2 *a*** e ***a*²** , quella calcolata nell'esempio precedente

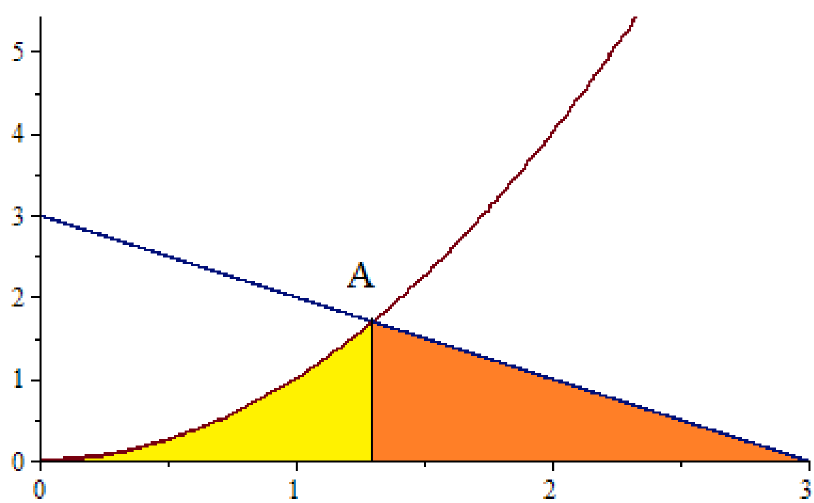
$$Area \ \mathbf{in} \ giallo = 2 a^3 - \int_{-a}^{a} x^2 \, dx = 2 a^3 - \frac{2}{3} a^3 = \frac{4}{3} a^3$$

Esempio 3 Calcolare l'area in figura

$plot([x^2, -x+3], x = 0..3)$



L'area che vogliamo calcolare è la parte di piano compresa tra la parabola , la retta $y = -x + 3$ e l'asse x delle ascisse .
E' formata dalla somma di un triangoloide e di un triangolo



Per poter svolgere i calcoli è necessario conoscere le coordinate del punto A intersezione parabola-retta , risolvendo il sistema $\{\ y = x^2\ ,\ y = -x + 3$

$solve(\{x^2 + x - 3 = 0\}, x);$

$$\left\{x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}\right\} \tag{5}$$

$eval\left(x^2, x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right)$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right)^2 \tag{6}$$

$$\xrightarrow{\text{expand (-1/2+1/2*sqrt(13))^2}}$$

$$\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \tag{7}$$

$A = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}\right)$

Ora possiamo calcolare l'area del triangoloide giallo

$\int_0^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}} x^2 \, dx$

$$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right)^3 \tag{8}$$

e l'area del triangolo rosso

restart

$base := 3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$

$$\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \tag{9}$$

$altezza := \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right)^2$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right)^2 \tag{10}$$

Area triangolo rosso $= eval\left(\frac{base \cdot altezza}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right)^2 \tag{11}$$

$$\xrightarrow{\text{simplify *(1/2,7/2-1/2*sqrt(13))*(-1/2+1/2*sqrt(13))^2}}$$

$$-\frac{1}{16}\left(-7+\sqrt{13}\right)\left(-1+\sqrt{13}\right)^2 \qquad \textbf{(12)}$$

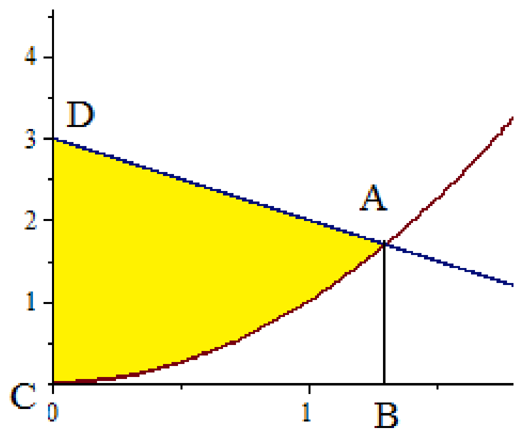
Area della figura $= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)^3 - \frac{1}{16}\left(-7+\sqrt{13}\right)\left(-1+\sqrt{13}\right)^2 =$

$$simplify\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)^3 - \frac{1}{16}\left(-7+\sqrt{13}\right)\left(-1+\sqrt{13}\right)^2\right)$$

$$\frac{73}{12}-\frac{13}{12}\sqrt{13} \qquad \textbf{(13)}$$

ESERCIZIO. Svolgere , con la calcolatrice tascabile , tutti i calcoli dell'esempio in forma decimale approssimando a due cifre decimali

Esempio 4 Calcolare l'area della figura



$A=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}, \frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)$ $B=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}, 0\right)$ C (0,0) D = (0, 3)

Area trapezio $= simplify\left(\frac{\left(3+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)}{2}\right)$

$$-\frac{1}{8}\left(-13+\sqrt{13}\right)\left(-1+\sqrt{13}\right) \qquad \textbf{(14)}$$

$$\text{Area gialla} = \text{Area trapezio ABCD} - \int_0^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}} x^2\,dx =$$

$$simplify\left(-\frac{1}{8}\left(-13+\sqrt{13}\right)\left(-1+\sqrt{13}\right)-\int_0^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}} x^2\,dx\right)$$

$$-\frac{19}{12}+\frac{13}{12}\sqrt{13} \quad \textbf{(15)}$$

ESERCIZIO . Svolgere , con la calcolatrice tascabile , tutti i calcoli dell'esempio in forma decimale approssimando a due cifre decimali

COMPITI IN PREPARAZIONE DELLA VERIFICA DEL 23/09/2014

Calcolare l'area esatta delle seguenti figure colorate

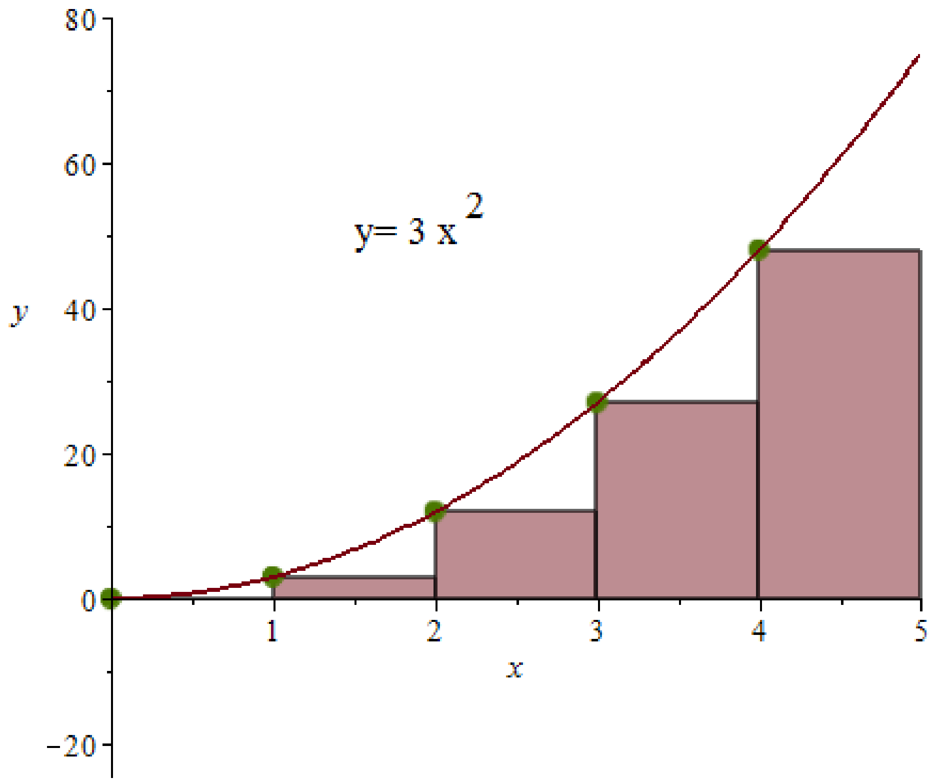


figura 1

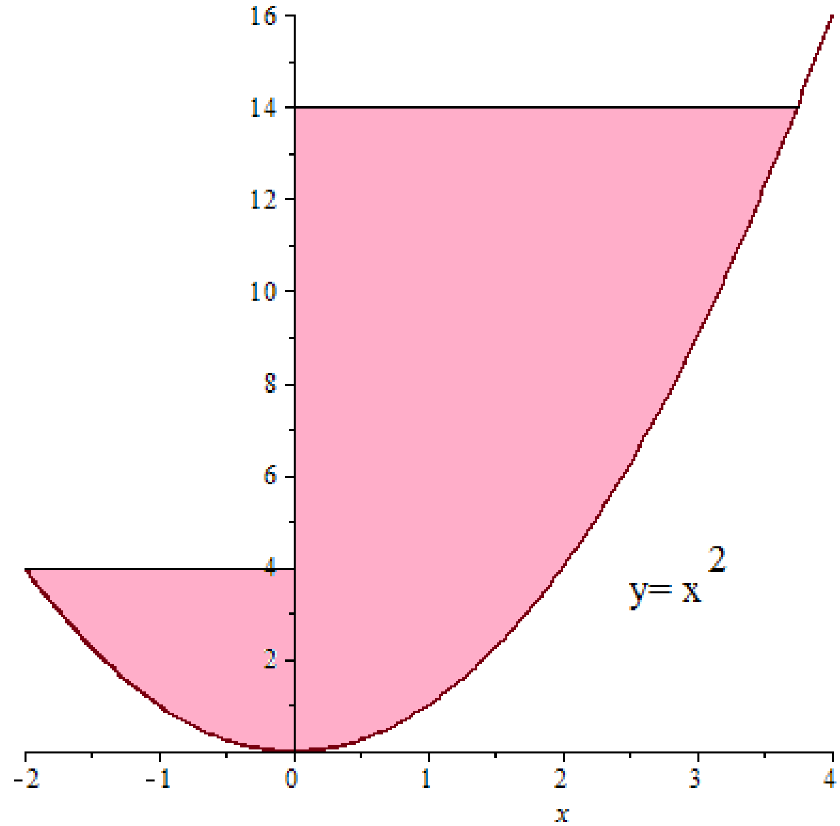


figura 2

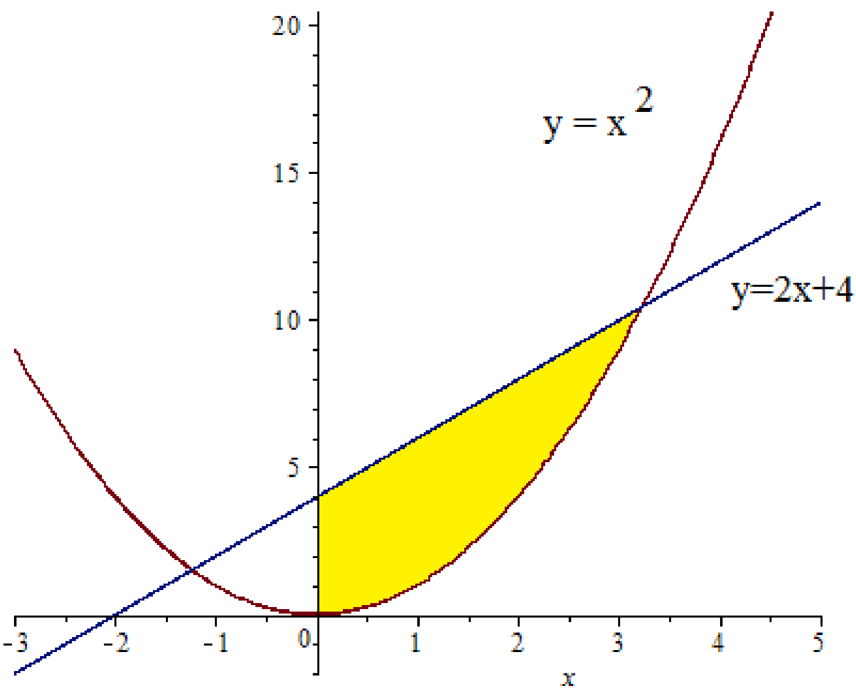


figura 3

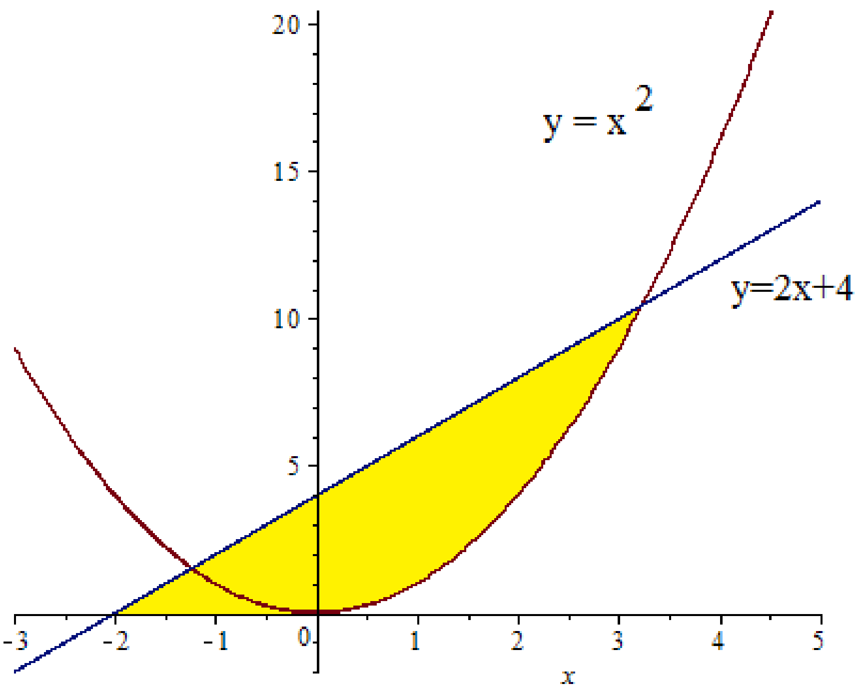


figura 4

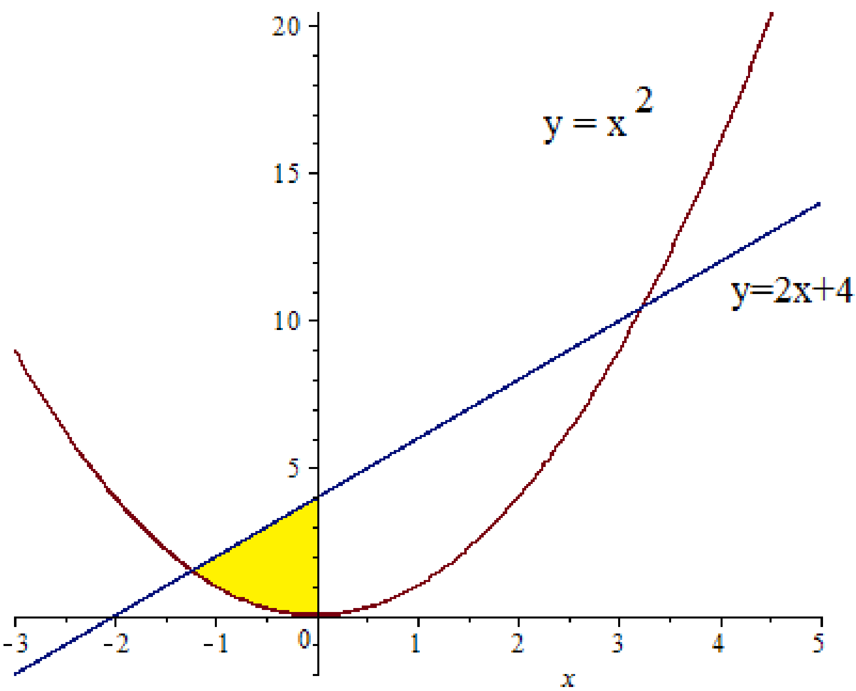


figura 5

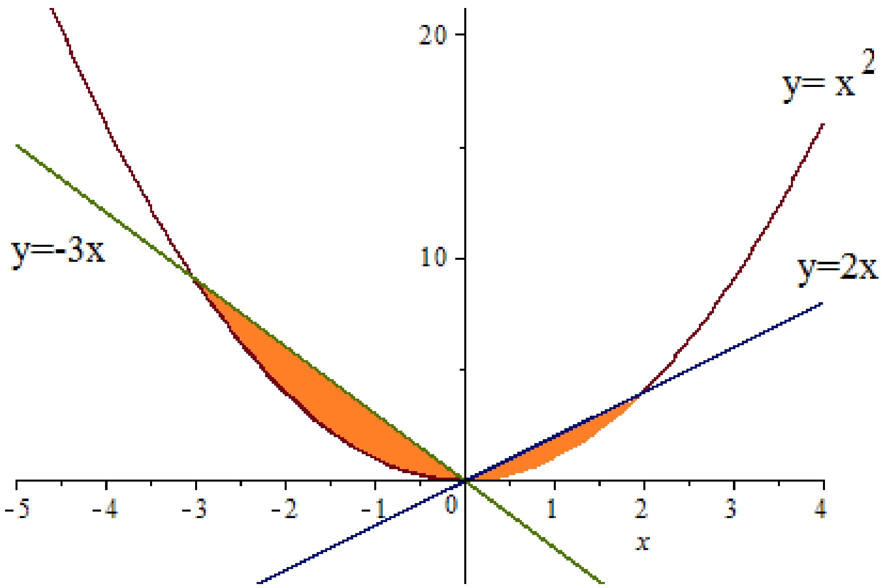


figura 6