

La formula di Taylor

Dato il polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ calcoliamo le sue derivate successive

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

$$y''' = y^{IV} = y^V = \dots = 0$$

Consideriamo due punti vicini $A = (x_0, P(x_0))$ e $B = (x_0 + h, P(x_0 + h))$ e studiamo la dipendenza di B da A .

In A il polinomio e le sue derivate (non nulle identicamente) hanno i seguenti valori :

$$P(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$$

$$P'(x_0) = 2ax_0 + b \quad (1)$$

$$P''(x_0) = 2a$$

In B sviluppiamo $P(x_0 + h)$

$$\begin{aligned} P(x_0 + h) &= ax_0^2 + 2ax_0h + ah^2 + bx_0 + bh + c \\ &= (ax_0^2 + bx_0 + c) + (2ax_0 + b)h + ah^2 \end{aligned} \quad (2)$$

per confronto dei coefficienti della (2) con la (1) possiamo riscrivere la (2) nella forma :

$$P(x_0 + h) = P(x_0) + P'(x_0)h + \frac{P''(x_0)}{2}h^2$$

Se ripetiamo il medesimo procedimento per un generico polinomio di 3° e 4° grado (1) troviamo rispettivamente

$$P(x_0 + h) = P(x_0) + P'(x_0)h + \frac{P''(x_0)}{2}h^2 + \frac{P'''(x_0)}{6}h^3 \quad (3a) \text{ polinomio di terzo grado}$$

$$P(x_0 + h) = P(x_0) + P'(x_0)h + \frac{P''(x_0)}{2}h^2 + \frac{P'''(x_0)}{6}h^3 + \frac{P^{IV}(x_0)}{24}h^4 \quad (3b) \text{ polinomio di 4° grado}$$

I numeri che compaiono a denominatore non sono altro che la successione dei fattoriali

1 Ricordiamo i prodotti notevoli

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $n! = n(n-1)!$

In generale un polinomio di grado n ha al più n derivate non nulle identicamente e le formule (3) si generalizzano nella seguente :

$$P(x_0+h) = P(x_0) + P'(x_0)h + \frac{P''(x_0)}{2} h^2 + \frac{P'''(x_0)}{6} h^3 + \frac{P^{IV}(x_0)}{24} h^4 + \dots + \frac{P^n(x_0)}{n!} h^n \quad (4)$$

La (4) è conosciuta come **sviluppo nel polinomio di Taylor in un intorno del punto** x_0

Nel caso di una funzione generica $y=f(x)$ si dimostra che la (4) vale ancora ma non può essere esatta ; dopo il polinomio di Taylor ci sarà sempre un resto che diventerà sempre più piccolo all'aumentare del grado n .

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2} h^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} h^3 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} h^n + Resto(x_0; n) \\ &= TAYLOR(f, x_0, n) + Resto(x_0; n) \end{aligned}$$

con $\lim_{n \rightarrow \infty} Resto(x_0; n) = 0$

Per poter tracciare il grafico della funzione e del polinomio di Taylor approssimante nell'intorno del punto x_0 si deve scrivere h nella forma $x - x_0$

$$TAYLOR(f, x_0, n) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Esempi

Scrivere lo sviluppo di Taylor del polinomio $y = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 6$ **nell'intorno del punto** $x_0 = 1$

Iniziamo con il calcolo delle derivate

$$y' = 6x^2 + 10x - 3 \quad y'' = 12x + 10 \quad y''' = 12$$

Ora determiniamo il valore della funzione e delle sue tre derivate nel punto di ascissa 1

$$y(1) = 10 \quad y'(1) = 13 \quad y'' = 22 \quad y''' = 12$$

Componiamo il polinomio di Taylor

$$y(1+h) = 10 + 13h + \frac{22}{2!} h^2 + \frac{12}{3!} h^3 = 10 + 13(x-1) + 11(x-1)^2 + 2(x-1)^3$$

Scrivere il polinomio di 6° grado della funzione $y = \sin x$ in $x=0$

Iniziamo con il calcolare le prime sei derivate e valutarle in $x=0$

derivata	Valore della derivata in $x_0=0$
$y'=\cos x$	$y'(0)=\cos 0 = 1$
$y''= -\sin x$	$y''(0)= -\sin 0 =0$
$y'''= -\cos x$	$y'''(0)= -\cos 0=-1$
$y^{IV}= \sin x$	$y^{IV}(0)= \sin 0=0$
$y^V = \cos x$	$y^V(0) = \cos 0=1$
$y^{VI}= -\sin x$	$y^{VI}(0)= -\sin 0=0$

$$\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + Resto$$

Scrivere il polinomio di 6° grado della funzione $y = \cos x$ in $x=0$

Iniziamo con il calcolare le prime sei derivate e valutarle in $x=0$

derivata	Valore della derivata in $x_0=0$
$y' = -\sin x$	$y'(0) = \sin 0 = 0$
$y'' = -\cos x$	$y''(0) = -\cos 0 = 1$
$y''' = \sin x$	$y'''(0) = \sin 0 = 0$
$y^{IV} = \cos x$	$y^{IV}(0) = \cos 0 = 1$
$y^V = -\sin x$	$y^V(0) = -\sin 0 = 0$
$y^{VI} = -\cos x$	$y^{VI}(0) = -\cos 0 = -1$

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + Resto$$

Scrivere il polinomio di 6° grado della funzione $y = e^x$ in $x=0$

Dato che per tale funzione la derivata coincidono con la funzione stessa abbiamo

$$y(x_0) = y'(x_0) = y''(x_0) = \dots = y^{VI}(x_0) = 1$$

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} + \frac{h^6}{6!} + Resto$$

La formula di Eulero

Eulero pose $h=i\varphi$ nelle formula per e^h e $h=\varphi$ nelle formule del seno e del coseno.

Svolse i calcoli

$$\operatorname{sen} \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \operatorname{Resto}$$

$$\operatorname{cos} \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \operatorname{Resto}$$

e trovò

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \right) + i \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots \right) =$$

$$e^{i\varphi} = \operatorname{cos} \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$$

Ponendo $\varphi=\pi$, Eulero ottenne quella che è considerata la più bella formula di matematica

$$e^{i\pi} = -1$$