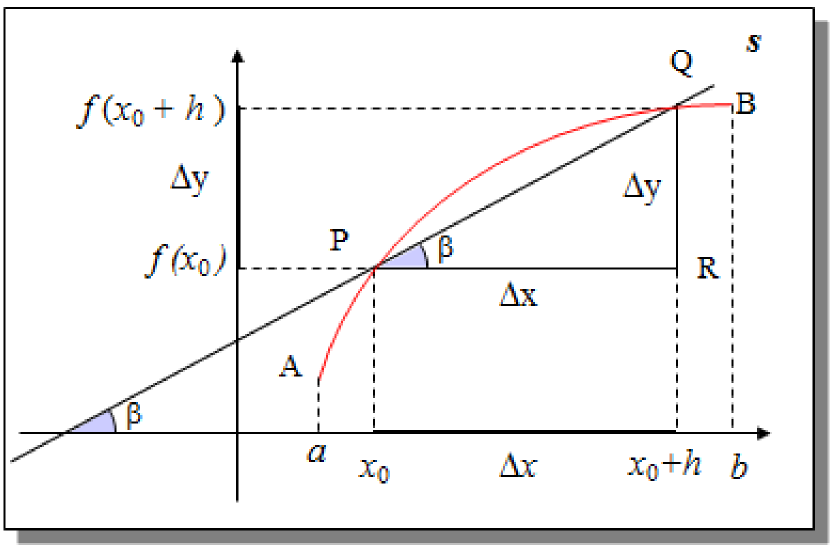
La soluzione Newton _ Leibniz per la determinazione della retta tangente ad una funzione f(x) in un suo punto

Data una funzione $\boldsymbol{y = f(x)}$ definita in un intervallo $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, un punto $\boldsymbol{x_0} \in (a; b)$ e un punto $\boldsymbol{x_0 + h} \in (a; b)$ con $\boldsymbol{h \neq 0}$, si pone:

$\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$ incremento della variabile indipendente x

$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$ incremento della variabile dipendente y

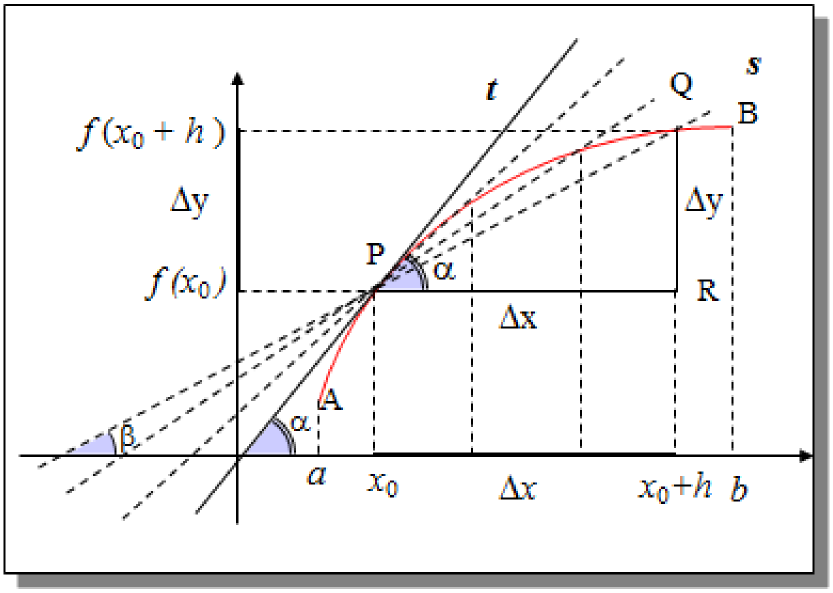
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ **rapporto incrementale**



Il rapporto incrementale rappresenta il **coefficiente angolare della retta s** secante la curva nei punti P e Q,
rispettivamente di ascisse x0 e x0+h

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m_{PQ} = tg\,\beta$$

La nuova idea che portarono Newton e Leibniz fu di considerare nel fascio di rette passanti per P quelle intersecanti la funzione f(x) in un secondo punto Q
tra queste secanti essi **inclusero** la tangente come <u>secante in cui i due punti coincidono</u>



Stabilito che cosa fosse la tangente i due grandi geni scelsero strade diverse per determinare il coefficiente angolare.

METODO DI NEWTON

Assegnata una funzione

$f(x) := x^5 + 4 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 8$

$$x \rightarrow x^5 + 4\,x^3 + 5\,x^2 - 2\,x + 8 \qquad \textbf{(1)}$$

si sviluppa la differenza delle ordinate e si riordina secondo le potenze di h.

$Dy := f(\alpha + h) - f(\alpha)$

$$(\alpha + h)^5 + 4\,(\alpha + h)^3 + 5\,(\alpha + h)^2 - 2\,h - \alpha^5 - 4\,\alpha^3 - 5\,\alpha^2 \qquad \textbf{(2)}$$

si divide per h il polinomio trovato

$collect\left(expand\left(\frac{Dy}{h}\right), h\right)$

$$h^4 + 5\,\alpha\,h^3 + (4 + 10\,\alpha^2)\,h^2 + (12\,\alpha + 5 + 10\,\alpha^3)\,h + 12\,\alpha^2 + 5\,\alpha^4 + 10\,\alpha - 2 \qquad \textbf{(3)}$$

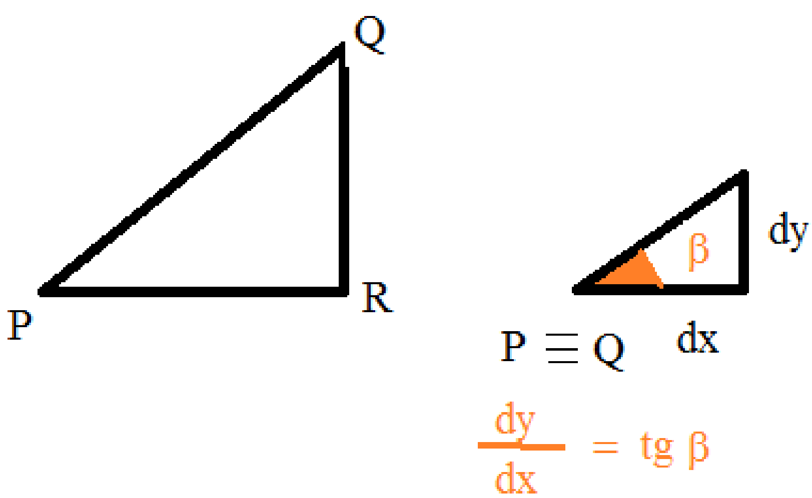
infine **si pone** h=0 e quello che rimane è il coeffciente angolare della retta tangente in (α , f(α)).

$eval\left(h^4 + 5\,\alpha\,h^3 + (4 + 10\,\alpha^2)\,h^2 + (12\,\alpha + 5 + 10\,\alpha^3)\,h + 12\,\alpha^2 + 5\,\alpha^4 + 10\,\alpha - 2, h = 0\right)$

$$12\,\alpha^2 + 5\,\alpha^4 + 10\,\alpha - 2 \tag{4}$$

METODO DI LEIBNIZ

Diversamente da Newton , Leibniz pose l'attenzione sul triangolo PQR creato da una secante .
Se la tangente è una particolare secante , allora anch' essa deve possedere un triangolo
Questo triangolo non è finito ma i suoi lati sono grandezzze infinitesime



Da queste idee Leibniz propone di partire dall' espressione $y = f(\alpha)$
e sostituire y con $y + dy$ e α con $\alpha+dx$

$dy := f(\alpha + dx) - f(\alpha)$

$$(\alpha + dx)^5 + 4\,(\alpha + dx)^3 + 5\,(\alpha + dx)^2 - 2\,dx - \alpha^5 - 4\,\alpha^3 - 5\,\alpha^2 \tag{5}$$

$collect\big(expand\big((\alpha + dx)^5 + 4\,(\alpha + dx)^3 + 5\,(\alpha + dx)^2 - 2\,dx - \alpha^5 - 4\,\alpha^3 - 5\,\alpha^2\big), dx\big)$

$$dx^5 + 5\,\alpha\,dx^4 + \left(4 + 10\,\alpha^2\right) dx^3 + \left(12\,\alpha + 5 + 10\,\alpha^3\right) dx^2 + \left(12\,\alpha^2 + 5\,\alpha^4 + 10\,\alpha - 2\right) dx \tag{6}$$

Nei calcoli successivi ogni volta che si incontrano monomi in dx e dy di grado uguale o superiore a 2 , questi vanno eliminati

Dunque $dy = \left(5\,\alpha^4 + 12\,\alpha^2 + 10\,\alpha - 2\right)dx$

$$\frac{dy}{dx} = 5\,\alpha^4 + 12\,\alpha^2 + 10\,\alpha - 2$$ (ritroviamo lo stesso risultato di Newton)

Cenni storici e critica

Newton sviluppò le sue idee sul calcolo infinitesimale tra il 1665 e il 1666 e lo chiamò "metodo delle flussioni".
Leibniz sviluppò le sue idee tra il 1673 e il 1676 basandosi sugli infinitesimi.

Entrambi i metodi non avevano all'epoca fondamenti solidi:

le flussioni che partivano con l'ipotesi di essere quantità reali e molto piccole che poi improvvisamente ... si annullavano

gli infinitesimi , quantità più piccole di ogni numero reale ma non nulle .... cosa sono?

Delle critiche e delle " rifondazione moderna" di questi metodi parleremo più aventi.