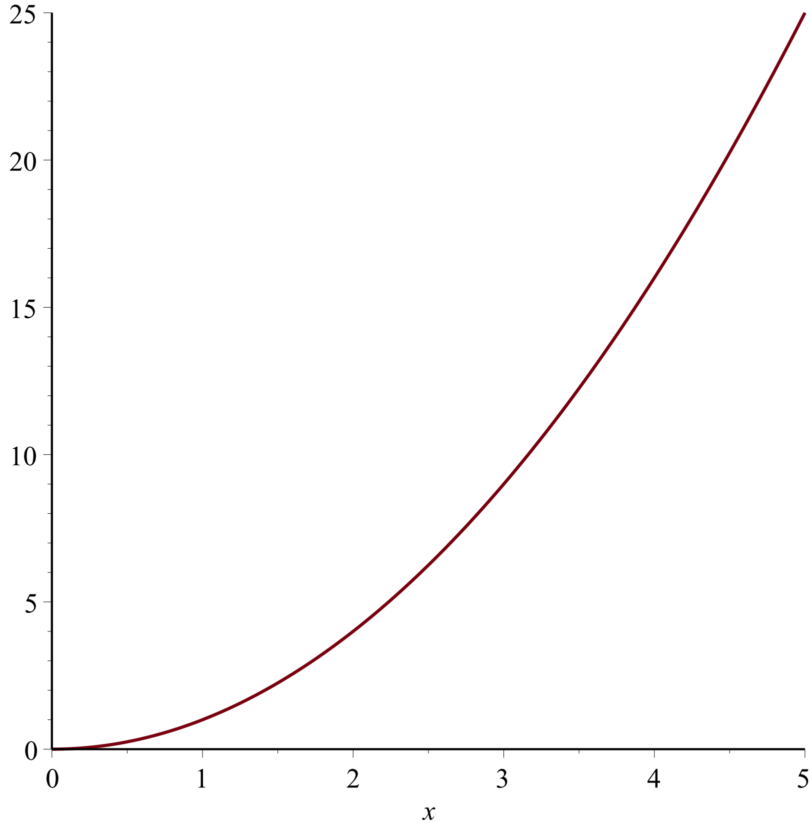
L'INSIEME DELLE TANGENTI AD UNA PARABOLA

Data la parabola
$with(plots)$ :
$plot(x^2, x = 0 ..5)$

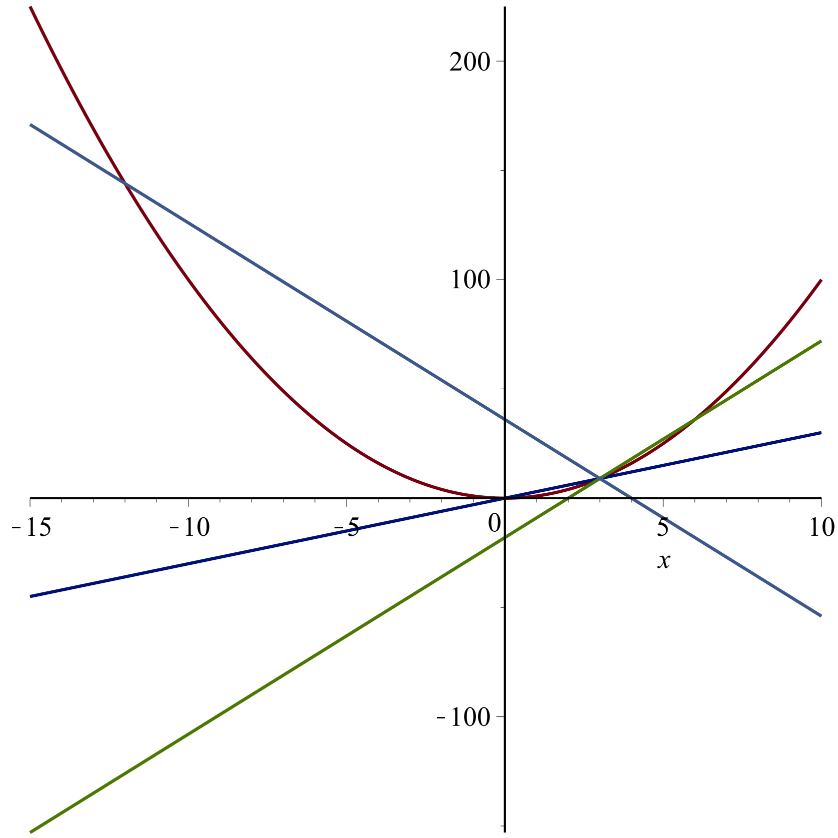


e un suo punto $T = (3, 9)$

$$T = (3, 9) \tag{1}$$

consideriamo il fascio proprio di rette con origine in quel punto

$plot([x^2, 3 \cdot x, 9 \cdot x - 18, -9 \cdot x + 36], x = -15 ..10)$




In genere (come si vede in figura) ogni retta del fascio ha una seconda intersezione con la parabola distinta da T.
Solo una di queste rette avrà solo intersezione in T ; è *la retta tangente in T* alla parabola.

Quale sarà il suo coefficiente angolare $m_T$ ?
Per ricavarlo scriviamo il sistema parabola - fascio di rette per T e determiniamo l'equazione risolvente

$\{ \; y = x^2 \quad , \; y - 9 = m(x-3)$

$x^2 - m \cdot x + 3 \cdot m - 9 = 0)$ Le soluzioni di questa equazione (parametrica in $m$) di 2° grado sono le ascisse dei punti di intersezione retta - parabola.

Al parametro $m_T$ corrisponderà la soluzione $x_1 = x_2 = 3$ che equivale alla condizione $\Delta = 0 \leftrightarrow$ $m^2 - 12 \cdot m + 36 = 0$
Dunque $m_T = 6$ e $y = 6\,x - 9$ l'equazione della retta tangente cercata.

Scegliamo altri punti per capire meglio il procedimento

$x=2$ , $y=4$ equazione fascio $y-4=m(x-2)$ equazione risolvente il sistema
$x^2-mx+2m-4=0$ $\Delta=0 \leftrightarrow m^2-8m+16=0$ da cui $m_T=4$
$x=1$ , $y=1$ equazione fascio $y-1=m(x-1)$ equazione risolvente il sistema
$x^2-mx+m-1=0$ $\Delta=0 \leftrightarrow m^2-4m+4=0$ da cui $m_T=2$
$x=-1$ , $y=1$ equazione fascio $y-1=m(x+1)$ equazione risolvente il sistema
$x^2-mx-m-1=0$ $\Delta=0 \leftrightarrow m^2+4m+4=0$ da cui $m_T=-2$
$x=10$ , $y=100$ equazione fascio $y-100=m(x-10)$ equazione risolvente il sistema
$x^2-mx+10m-100=0$ $\Delta=0 \leftrightarrow m^2-40m+400=0$ da cui $m_T=20$

Confrontando i valori numerici degli $m_T$ trovati con l'ascissa $x_T$ del punto di tangenza notiamo la seguente regolarità $m_T=2\cdot x_T$

$$\begin{bmatrix} x_T & m_T \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$$

Se questo è vero per ogni punto della parabola allora l'equazione della tangente in $T=\left(x_T, x_T^2\right)$ sarà $y-x_T^2=2\cdot x_T\left(x-x_T\right)$

Infatti ponendo a sistema tale equazione con la parabola abbiamo :

$x^2-2x_T\cdot x+x_T^2=0=\left(x-x_T\right)^2$ da cui risulta che $x_T$ è una soluzione doppia.

Tabella riassuntiva

| funzione | punto di tangenza | coefficiente angolare della tangente | equazione retta tangente |
|---|---|---|---|
| $y=x^2$ | $T=\left(x_T\ ,\ x_T^2\right)$ | $m_T=2\cdot x_T$ | $y=2\cdot x_T\cdot x-x_T^2$ |

Si chiama *derivata prima* della funzione $y=x^2$ la funzione $y=2\cdot x$ che ad ogni ascissa (della parabola) associa il coefficiente angolare della tangente in quel punto.

In generale si indica la funzione con $f(x)=x^2$ e con $f'(x)=2\cdot x$ ( o con $Df(x)$ ) la sua derivata prima.

$plot([x^2, 2\cdot x], x=-3..5)$

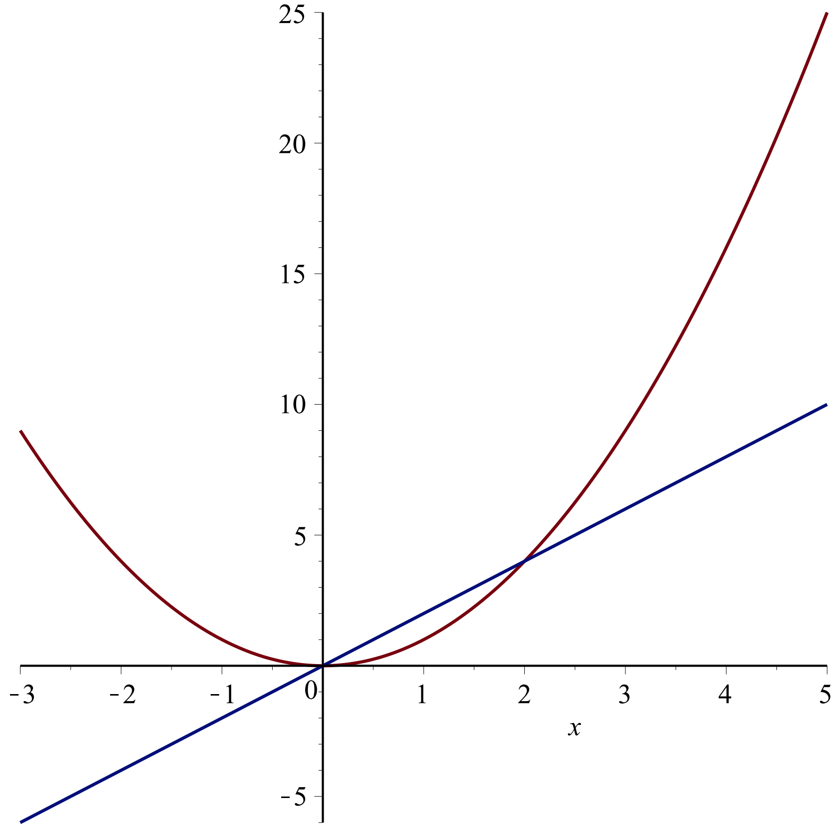



grafico della funzione $y = x^2$ e della sua derivata prima $y' = 2\cdot x$ ( y' è un terzo modo per indicare la derivata prima)

Con questa nuova notazione abbiamo

| funzione $f(x)$ | derivata prima | punto di tangenza | coefficiente angolare | equazione retta tangente |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f'(x)$ | $T = (x_T, f(x_T))$ | $m_T = f'(x_T)$ | $y - f(x_T) = f'(x_T)\cdot(x - x_T)$ |

OSSERVAZIONI.

1. Se la parabola ha equazione $y = a\cdot x^2$ con identico procedimento avremo nel punto $T = (x_T, ax_T^2)$

sistema parabola - retta generica del fascio per T $\begin{cases} y = ax^2 \\ y - ax_T^2 = m\cdot(x - x_T) \end{cases}$

}

equazione risolvente $a\cdot x^2 - m\cdot x + \left(mx_T - a\cdot x_T^2\right) = 0$ condizione $\Delta=0 \leftrightarrow$ $m^2 - 4\cdot m\cdot x_T + 4\cdot a\cdot x_T^2 = 0$ da cui $m_T = 2\cdot a\cdot x_T$

2. Se la parabola ha equazione $y = ax^2 + bx + c$ e vogliamo calcolare l'equazione della retta tangente in $T = \left(x_T, ax_T^2 + b\cdot x_T + c\right)$ possiamo

ridurla a forma canonica scrivendola nella forma $y + \dfrac{\Delta}{4\,a^2} = a\left(x + \dfrac{b}{2\,a}\right)^2$

da cui utilizzando le nuove coordinate $u = x + \dfrac{b}{2\,a}$ e $v = y + \dfrac{\Delta}{4\,a^2}$ otteniamo la nuova equazione $v = au^2$

In questo nuovo riferimento u-v il punto di tangenza avrà coordinate $T = \left(u_T, au_T^2\right)$ e la retta tangente equazione $v - au_T^2 = 2\cdot a\cdot u_T\left(u - u_T\right)$
Riscrivendo l'equazione della tangente nelle coordinate x-y abbiamo :

$$y + \frac{\Delta}{4\,a^2} - a\left(x_T + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = 2\cdot a\cdot\left(x_T + \frac{b}{2\,a}\right)\left(x + \frac{b}{2\,a} - x_T - \frac{b}{2\,a}\right)$$

$$y + \frac{\Delta}{4\,a^2} - a\left(x_T + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = \left(2\cdot a\cdot x_T + b\right)\left(x - x_T\right) \quad \rightarrow \quad y - y_T = \left(2\cdot a\cdot x_T + b\right)\left(x - x_T\right)$$

3. Se la funzione è una retta $y = m\cdot x + q$ chi sarà la sua tangente ?

E' chiaro che scelto un punto $T = \left(x_T\ ,\ m\cdot x_T + q\right)$ la retta tangente sarà .... se stessa e in particolare $y' = m$

Nel caso di una retta orizzontale $y = k$ avremo y ' = 0 ( infatti il coefficiente angolare è zero)

Possiamo riassumere quanto visto nella seguente tabella

---

funzione funzione derivata prima punto di tangenza coefficiente angolare equazione retta tangente

$f(x) = k$ $\quad$ $f'(x) = 0$ $\quad$ $T = (x_T, k)$

$m_T = 0$ $\quad$ $y = k$

$f(x) = m \cdot x + q$ $\quad$ $f'(x)) = m$ $\quad$ $T = (x_T, mx_T + q)$

$m_T = m$ $\quad$ $y = m \cdot x + q$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad$ $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ $\quad$ $T = (x_T, ax_T^2 + bx_T + c)$

$m_T = f'(x_T)$ $\quad$ $y - y_T = (2 \cdot a \cdot x_T + b)(x - x_T)$

---

Dalla quale risulta, almeno per i polinomi, che la *derivata prima è lineare* nel senso che è somma delle derivate dei singoli monomi

$\mathrm{D}(m \cdot x) = m \cdot \mathrm{D}(x)$

$\mathrm{D}(mx + q) = \mathrm{D}(mx) + \mathrm{D}(q) = m\,\mathrm{D}(x) + 0 = m \cdot 1 + 0 = m$

$\mathrm{D}(ax^2 + bx + c) = \mathrm{D}(ax^2) + \mathrm{D}(bx) + \mathrm{D}(c) = a \cdot \mathrm{D}(x^2) + b \cdot \mathrm{D}(x) + 0 = 2 \cdot a \cdot x + b \cdot 1 + 0 = 2 \cdot a \cdot x + b$

Esercizi

1. Compilare la tabella

| funzione | funzione derivata prima |
|---|---|
| $y = 4x^2$ | |
| $y = \frac{3}{2}x^2 + 4$ | |
| $y = 4x^2 - \frac{8}{3}x + 19$ | |

2. Scrivere l'equazione della retta tangente alla funzione

$y = 4x^2$ nel punto $T$ di ascissa $x = -\frac{3}{2}$

$y = \frac{3}{2}x^2 + 4$ nel punto $T$ di ordinata $y = 9$

$y = 4x^2 - \frac{8}{3}x + 19$ nel punto di ascissa $x = 4$

3. Sappiamo che l'equazione della tangente ad una parabola in x=3 è $y = 4x + 2$. Possiamo scrivere esattamente l'equazione della parabola?