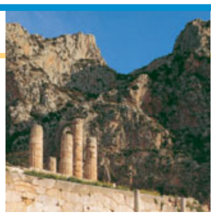
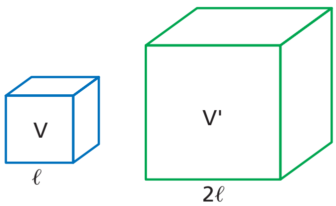


Il problema di Delo

…come fecero gli ateniesi a raddoppiare l'altare?

L'altare di Apollo, famoso in tutta la Grecia, aveva una forma particolare: era, infatti, un cubo. Si trattava di costruire un nuovo altare di uguale forma ma con volume doppio.
La leggenda narra che per prima cosa gli ateniesi, di ritorno da Delfi, si recarono sull'isola di Delo e costruirono un nuovo altare, col lato doppio del precedente.



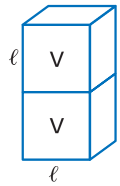
Se l era il lato dell'altare originale, il suo volume era

$$V = l^3,$$

mentre il volume del nuovo altare valeva:

$$V' = (2l)^3 = 8l^3 = 8V.$$

Chiaramente la peste non cessò: gli ateniesi avevano infatti costruito un altare non due, ma otto volte più grande di quello iniziale.
Resisi conto dell'errore, si rimisero al lavoro e costruirono un nuovo altare, mettendo sopra a quello vecchio un altro cubo delle stesse dimensioni. Anche questa volta, la peste non terminò: il volume era quello richiesto, ma l'altare non era più un cubo.



Analizziamo il problema dal punto di vista algebrico. Per costruire un altare cubico di volume doppio rispetto a quello originale deve essere

$$V' = 2V \rightarrow l'^3 = 2l^3,$$

e quindi:

$$l' = \sqrt[3]{2} \cdot l.$$

In conclusione, bisogna poter misurare un lato pari a $\sqrt[3]{2} \cdot l$; se per semplicità assumiamo $l = 1$, si tratta di costruire un segmento a cui corrisponda il numero $\sqrt[3]{2}$.
Le regole fondamentali delle costruzioni della geometria euclidea, applicate nell'antica Grecia, permettono il solo utilizzo di riga e compasso. Tali strumenti sono ben diversi da quelli odierni: per esempio, la riga euclidea non ha unità di misura e tacche utili per misurare, ma è una semplice asta che serve solo a tracciare segmenti di retta.
Oggi sappiamo, tramite dimostrazione algebrica, che con tali mezzi è impossibile ottenere un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$.
Il problema di Delo della duplicazione del cubo costituisce una delle questioni più discusse della Grecia classica. Molti matematici del tempo, come Ippocrate di Chio, Archita di Taranto e Menecmo, riuscirono a risolvere il problema attraverso metodi diversi, abbandonando comunque le regole geometriche di riga e compasso. È importante osservare che il segmento ottenuto attraverso questi procedimenti, corrispondente al numero $\sqrt[3]{2}$, risulta una grandezza incommensurabile rispetto al segmento di misura 1, cioè non esiste un segmento sottomultiplo comune. Questo significa che $\sqrt[3]{2}$ non è un numero razionale, ovvero non esiste alcun razionale che elevato al cubo sia uguale a 2. Si tratta quindi di un numero irrazionale.
La leggenda narra che la peste terminò quando gli ateniesi si rivolsero al filosofo Platone, che spiegò finalmente la risposta dell'oracolo: il dio non aveva bisogno di un altare dal volume duplicato, ma voleva far capire ai Greci che trascuravano lo studio della matematica e in particolare della geometria.

LA QUADRATURA DEL CERCHIO

Un altro dei problemi celebri della geometria classica che coinvolge i numeri irrazionali è quello della quadratura del cerchio. Dato un cerchio, bisogna costruire un quadrato di area pari a quella del cerchio.
Dal punto di vista algebrico, indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

$$\pi r^2 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{\pi} \cdot r.$$

Assunto per semplicità $r = 1$, si tratta di costruire un lato di misura $\sqrt{\pi}$. Nel 1882 venne dimostrata l'impossibilità di tale costruzione attraverso le regole euclidee di riga e compasso. Abbandonando tali regole è possibile ottenere la sua rappresentazione attraverso vari metodi. Il numero $\sqrt{\pi}$ è, come $\sqrt[3]{2}$, un numero irrazionale.