***Risolviamo il problema 3.*** Verifichiamo dapprima con Maple la correttezza della soluzione generale, e poi tracciamo il grafico di una soluzione con un valore del parametro $r$ che cade in quella che era una regione "caotica"… Ecco il *worksheet*:

$restart:$

$diffeq := diff(x(t), t) = r\cdot\left(1 - \frac{x(t)}{X}\right)\cdot x(t);$

$$diffeq := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, x(t) = r\left(1 - \frac{x(t)}{X}\right) x(t)$$

$dsolve(diffeq, x(t));$

$$x(t) = \frac{X}{1 + \mathrm{e}^{-r\,t}\,\_C1\, X}$$

$dsolve(\{diffeq, x(0) = x0\}, x(t));$

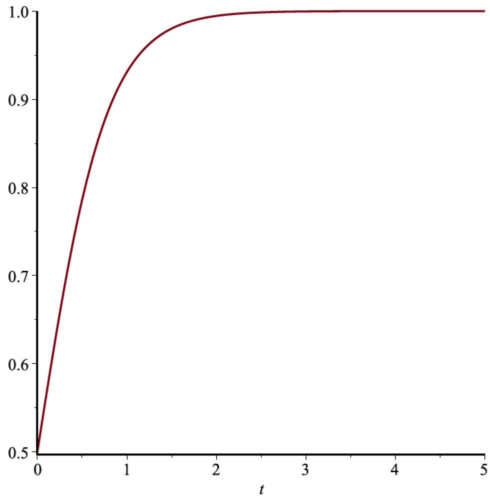
$$x(t) = \frac{x0\, X}{x0 + \mathrm{e}^{-r\,t}\, X - \mathrm{e}^{-r\,t}\, x0}$$

$X := 1:$
$x0 := 0.5:$
$r := 2.6:$
$dsolve(\{diffeq, x(0) = x0\}, x(t));$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\frac{13}{5}\,t}}$$

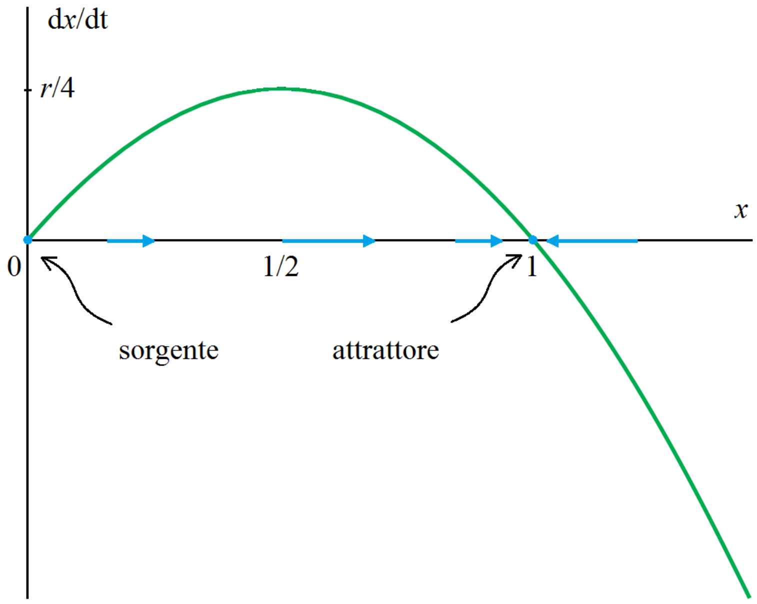
$with(plots):$

$plot\left(\frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\frac{13}{5}\,t}}, t = 0..5\right);$



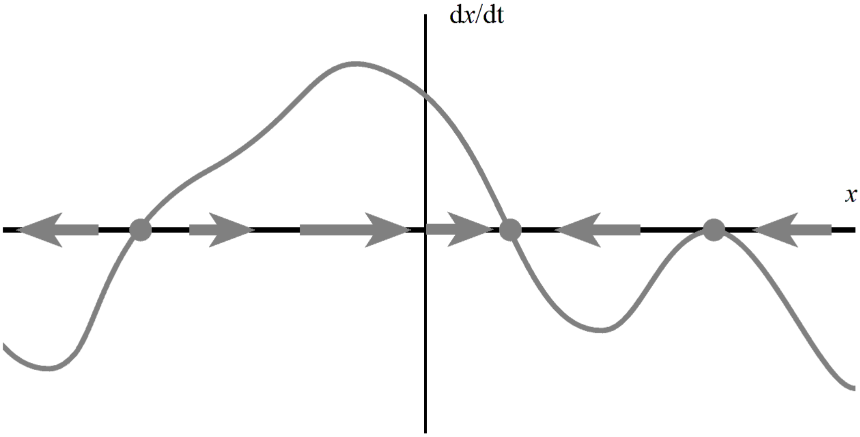

Non vi è più nulla di "caotico": se si prova a tracciare il grafico di altre soluzioni, in corrispondenza di diversi valori (positivi) di $x_0$ e di $r$, si vede che si tratta sempre di curve che tendono a 1 all'aumentare del tempo.

Il fatto che tutte le soluzioni con $x_0 > 0$ tendano a 1 all'aumentare di t può essere facilmente verificato disegnando il grafico di d$x$/dt in funzione di $x$ ($\geq 0$): $r(1-x)x$ è una parabola come nella figura riportata qui sotto, in cui si nota che per $x = 0$ la *velocità* con cui $x$ varia (rappresentata appunto da tale parabola) è nulla, e così per $x = 1$; per $0 < x < 1$ la velocità è positiva (ed è massima per $x = 1/2$, dove vale $r/4$), e quindi $x$ aumenta portandosi verso 1, mentre per $x > 1$ è negativa (via via più grande in modulo), e quindi $x$ diminuisce portandosi ancora verso 1.




Abbiamo visto che il comportamento del sistema "discretizzato" (rispetto al tempo) differisce da questo; in effetti, l'equazione (1) rappresenta un'*approssimazione* di quella differenziale originaria (2), che si ottiene sostituendo la derivata col rapporto incrementale (*metodo di Eulero diretto*) con passo unitario (nella fattispecie l'unità di tempo considerata era l'anno). Riprenderemo il discorso più avanti. Tuttavia, a prescindere da questa considerazione, si tratta di due sistemi *profondamente diversi*, come si evince risolvendo il problema testé proposto.

La funzione d$x$/dt, che specifica la velocità (dipendente da $x$) in ogni punto dello spazio delle fasi, è detta *campo vettoriale*; infatti la velocità è caratterizzata da un verso lungo una direzione e da un valore (modulo) rispetto all'unità di tempo della grandezza rappresentata, che dipendono dal punto $x$.
Nel caso *monodimensionale* (una sola variabile di stato), come nell'esempio testé trattato, l'analisi è particolarmente facilitata: si può infatti disegnare il grafico di d$x$/dt e su questo procedere a un'analisi qualitativa del moto. Ad esempio, nel caso illustrato dalla successiva figura si hanno tre punti di equilibrio, di cui soltanto quello mediano è *stabile*.




Per alcuni valori di $x$ sono disegnate le frecce (che indicano il verso del movimento), di lunghezza proporzionale al modulo della velocità (secondo la scala stabilita sull'asse delle ordinate). In conclusione, le soluzioni si muovono monotonicamente sulla retta $x$, o verso un punto di equilibrio o verso l'infinito, a seconda dello stato iniziale $x_0$.

Nel caso *bidimensionale*, tratteremo con un *sistema di due equazioni differenziali* (del primo ordine, nelle variabili $x$ e $y$) della forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \tag{3}$$

(Abbiamo chiamato $x$ e $y$ le due variabili di stato, *funzioni del tempo*, sperando di non indurre in confusione, nel prosieguo del discorso, chi è abituato a indicare con $y$ una funzione di $x$ per poi tracciarne il grafico nel piano cartesiano.)
Allora il campo vettoriale è spesso visualizzato rappresentando graficamente i valori delle funzioni $P$ e $Q$ (di due variabili) come (piccoli) vettori originati su una griglia di punti nello spazio (piano) delle fasi. A partire da ciascun punto della griglia è disegnato un vettore che ha come componente orizzontale (risp. verticale) il valore (opportunamente scalato) di $P$ (risp. $Q$) in tale punto.
Una soluzione del sistema (3) corrisponde dunque a una curva (detta *traiettoria*) che, a partire dallo stato (punto) iniziale, si muove nella direzione indicata dal vettore presente nel punto corrente dello spazio delle fasi, con una velocità istantanea proporzionale al modulo di tale vettore.
Affronteremo il caso bidimensionale nella prossima sezione, servendoci di un altro esempio famoso.