

ESERCIZIO 1

PREMESSA

La relazione che lega il costo totale conoscendo quello unitario e il numero di oggetti acquistati può essere rappresentata col termine regola(<sigla>,[costo unitario, quantità], <costo totale>). Più in generale, con il termine

regola(<Sigla>,<Lista antecedenti>,<Consequente>,<Peso>)

si può descrivere ogni regola di deduzione che consente di dedurre <Consequente> conoscendo tutti gli elementi contenuti nella <Lista antecedenti>; ogni regola è identificata in modo univoco da <Sigla> e da un <Peso> che misura la difficoltà di applicazione di quella regola (per esempio, basso per una somma, più alto per una divisione). Un procedimento di deduzione o di calcolo è rappresentato da un elenco di regole da applicare e quindi può essere descritto dalla lista delle sigle ad esse corrispondenti. Ad ogni procedimento può essere associato un peso complessivo dato dalla somma dei pesi delle singole regole che lo compongono.

PROBLEMA

È dato il seguente insieme di regole:

rs(1,[c1,c2],i,12)	rs(2,[c1,i],c2,7)	rs(3,[c2,i],c1,7)	rs(4,[i,h],a,7)
rs(5,[a,h],i,7)	rs(6,[i,a],h,7)	rs(7,[c1,c2],a,12)	rs(8,[c1,a],c2,12)
rs(9,[c2,a],c1,12)	rs(10,[c1,p1],h,7)	rs(11,[c1,h],p1,7)	rs(12,[p1,h],c1,7)
rs(13,[p1,p2],h,8)	rs(14,[h,p1],p2,7)	rs(15,[p2,h],p1,7)	rs(16,[c2,p2],h,7)
rs(17,[c2,h],p2,7)	rs(18,[p2,h],c2,7)	rs(19,[c1,c2,i],w,12)	

Si osserva che, conoscendo **[c1,c2]**, è possibile dedurre **i** con la regola 1 e **a** con la regola 7; ma è anche possibile dedurre **h** con la regola 6 dopo aver applicato prima la regola 1 (per dedurre **i**), poi la regola 7 (per dedurre **a**). Quindi, la lista [1,7,6] descrive il procedimento per dedurre **h** conoscendo **[c1,c2]**.

N.B. Quando due regole possono essere applicate in sequenza e non importa l'ordine, nel procedimento si applichi prima quella con la sigla di valore più basso.

Utilizzando le regole sopra riportate, trovare il numero N di procedimenti possibili per dedurre **w** conoscendo **[p1,c1]**. Elencare in ordine crescente nella lista P i pesi di ciascuno di questi procedimenti e riportare la lista L del procedimento di minor peso.

N	
L	
P	

SOLUZIONE

N	2
L	[10,14,18,1,19]
P	[45,52]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Per dedurre **w** esiste solo la regola 19 che può essere applicata conoscendo **[c1,c2,i]**; **c1** e **c2** sono noti, ma **i** non lo è; per dedurre **i** esistono due regole (la 1 e la 5), quindi è possibile che esistano almeno due procedimenti diversi per dedurre **w**.

In generale, per risolvere il problema si può usare il metodo *backward* (o *top down*) che consiste nel partire dalla incognita e cercare di individuare una regola per derivarla. Se esiste una regola le cui premesse sono tutte note (i dati) la soluzione è trovata, altrimenti si continua a cercare regole per

derivare i termini incogniti; il metodo è illustrato nella *prima* figura seguente, in cui le frecce non tratteggiate (di tipo OR) indicano le regole (la sigla è scritta a fianco) e le frecce tratteggiate (di tipo AND) indicano gli antecedenti della regola. In questo modo si trovano procedimenti per derivare l'incognita rappresentati graficamente da alberi, le cui foglie sono (tutte) dati.

I due alberi, mostrati in figura, descrivono i processi di derivazione richiesti da questo problema.

Un altro metodo è quello *forward* (o *bottom up*) che consiste nel partire dai dati e usare le regole applicabili per aumentare la conoscenza via via fino a comprendere l'incognita; il metodo è illustrato nella seconda figura seguente; anche in questo caso, naturalmente, si ottengono due sottoalberi.

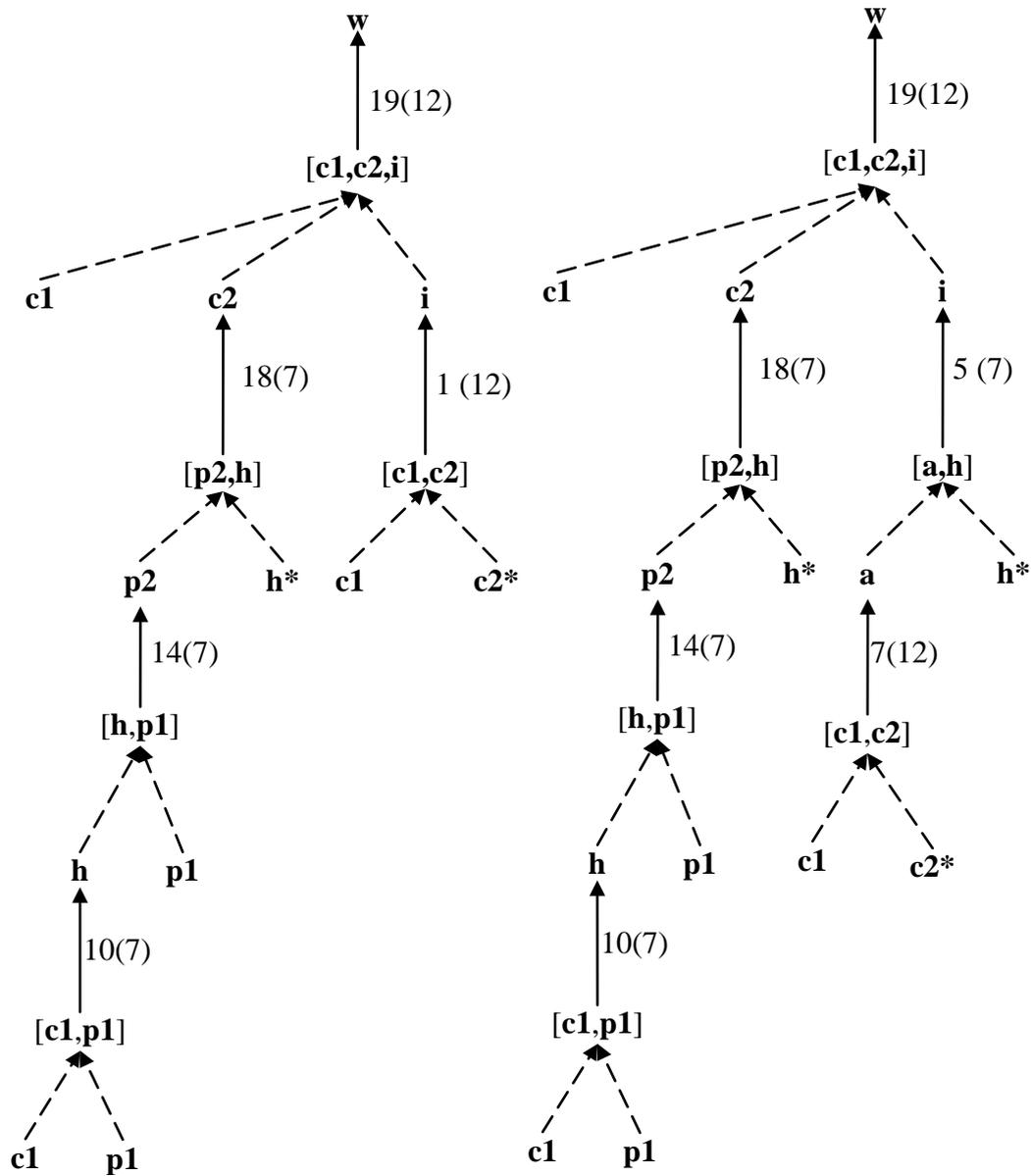
N.B. Nel primo caso la successione delle regole applicate è dal basso verso l'alto; nel secondo caso è dall'alto al basso.

I procedimenti sono:

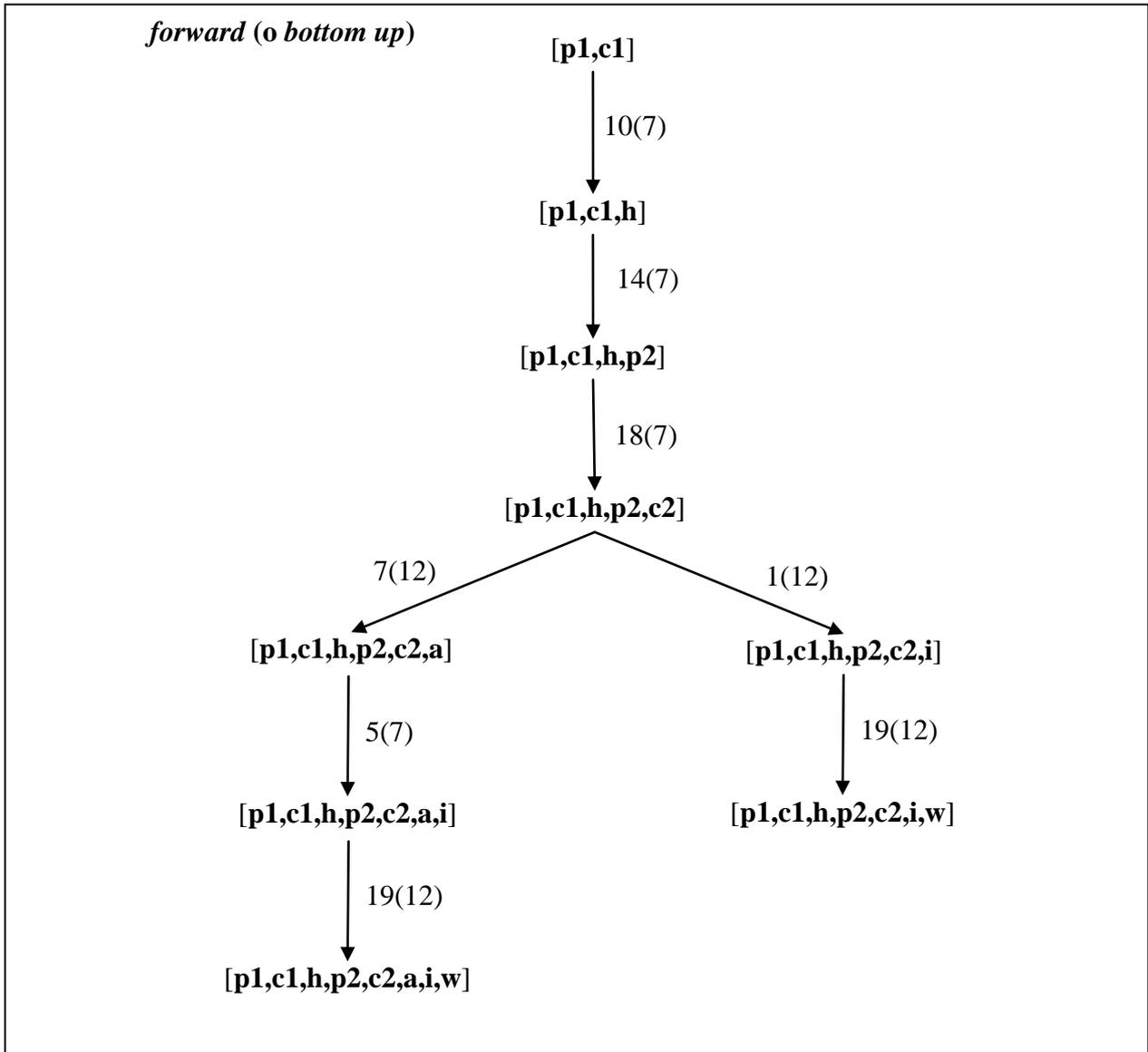
[10,14,18,1,19] di peso 45,

[10,14,18,7,5,19] di peso 52.

*backward (o top down)*



\* indica che quel nodo è già stato calcolato nello stesso albero e quindi può ritenersi noto



ESERCIZIO 2

PREMESSA

In un foglio a quadretti è disegnato un campo di gara, per esempio di 14 quadretti in orizzontale e 5 in verticale (vedi figura).

									S				
					P								
→													

Ogni casella può essere individuata da due numeri (interi); per esempio la casella contenente P è individuata da essere nella sesta colonna (da sinistra) e nella terza riga (dal basso): brevemente si dice che ha *coordinate* [6,3]; la prima coordinata (in questo caso 6) si dice *ascissa* e la seconda (in questo caso 3) si dice *ordinata*. Le coordinate della casella contenente S sono [10,4] e di quella contenente la freccia sono [1,1].

La freccia può essere pensata come un robot, in questo caso rivolto verso destra; il robot può eseguire tre tipi di comandi:

- girarsi di 90 gradi in senso *orario*: comando o;
- girarsi di 90 gradi in senso *antiorario*: comando a;
- avanzare di una casella (nel senso della freccia, mantenendo l’orientamento): comando f.

Questi comandi possono essere concatenati in sequenze in modo da permettere al robot di compiere vari percorsi; per esempio la sequenza di comandi descritta dalla lista [f,f,f,f,f,a,f,f] fa spostare il robot dalla posizione e orientamento iniziali mostrati in figura fino alla casella P; risultato analogo si ottiene con la lista [a,f,f,o,f,f,f,f]. Tuttavia, nel primo caso l’orientamento finale del robot è verso l’alto, mentre nel secondo caso l’orientamento finale è verso destra. Il robot ha sempre uno dei quattro orientamenti seguenti descritti con: n (nord, verso l’alto), s (sud, verso il basso), e (est, verso destra), o (ovest, verso sinistra).

N.B. Non confondere “o” come descrizione dell’orientamento e “o” come comando.

PROBLEMA

In un campo di gara sufficientemente ampio si trovano due robot (A e B) che devono compiere due percorsi così definiti:

robot A: coordinate della partenza [8,8], direzione n, lista dei comandi:

[a,f,f,o,f,f,a,a,f,f,f,a,o,f,f,f,o,f,a,a,f,f,f,f,a,f,f,f,a,f,f];

robot B: coordinate della partenza [9,8], direzione s, lista dei comandi:

[o,f,f,f,f,f,o,f,f,a,f,o,f,f,a,f,o,f,f,o,a,a,f,f,f,f,o,f,f,f,f].

Determinare la lista L delle caselle in cui i due percorsi si incrociano.

N.B. quanto segue:

1. una casella si indica con la lista delle sue due coordinate: per esempio [3,4] oppure [11,7];
2. L può essere la lista vuota ([]: vuol dire che i percorsi non si incrociano);
3. L può essere la lista di un solo elemento (per esempio [[4,5]]) o la lista di due elementi (per esempio [[3,4],[9,6]]) o la lista di più elementi;
4. se L ha due o più elementi questi devono comparire in ordine crescente di ascissa; a parità di ascissa, in ordine crescente di ordinata.

L	
---	--

SOLUZIONE

L	[[6,8],[7,8],[8,8]]
---	---------------------

p(8, 8)  
 p(7, 8)  
 p(6, 8)

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

I percorsi dei robot si possono ottenere disegnandoli o, in maniera più sistematica, compilando tabelle come le seguenti, che mostrano lo stato del robot *dopo* ogni comando. (Si noti come l'azione del comando "f", che aumenta o diminuisce una delle coordinate, dipende dall'orientamento.)

**PRIMO ROBOT**

SITUAZIONE	STATO
partenza	[8,8,n]
1 comando: a	[8,8,o]
2 comando: f	[7,8,o]
3 comando: f	[6,8,o]
4 comando: o	[6,8,n]
5 comando: f	[6,9,n]
6 comando: f	[6,10,n]
7 comando: a	[6,10,o]
8 comando: a	[6,10,s]
9 comando: f	[6,9,s]
10 comando: f	[6,8,s]
11 comando: f	[6,7,s]
12 comando: a	[6,7,e]
13 comando: o	[6,7,s]
14 comando: f	[6,6,s]
15 comando: f	[6,5,s]
16 comando: f	[6,4,s]
17 comando: o	[6,4,o]
18 comando: f	[5,4,o]
19 comando: a	[5,4,s]
20 comando: a	[5,4,e]
21 comando: f	[6,4,e]
22 comando: f	[7,4,e]
23 comando: f	[8,4,e]
24 comando: f	[9,4,e]
25 comando: f	[10,4,e]
26 comando: a	[10,4,n]
27 comando: f	[10,5,n]
28 comando: f	[10,6,n]
29 comando: f	[10,7,n]
30 comando: a	[10,7,o]
31 comando: f	[9,7,o]
32 comando: f	[8,7,o]
arrivo	[8,7,o]

## SECONDO ROBOT

SITUAZIONE	STATO
partenza	[9,8,s]
1 comando: o	[9,8,o]
2 comando: f	[8,8,o]
3 comando: f	[7,8,o]
4 comando: f	[6,8,o]
5 comando: f	[5,8,o]
6 comando: f	[4,8,o]
7 comando: o	[4,8,n]
8 comando: f	[4,9,n]
9 comando: f	[4,10,n]
10 comando:a	[4,10,o]
11 comando: f	[3,10,o]
12 comando: o	[3,10,n]
13 comando: f	[3,11,n]
14 comando: f	[3,12,n]
15 comando: a	[3,12,o]
16 comando: f	[2,12,o]
17 comando: o	[2,12,n]
18 comando: o	[2,12,e]
19 comando: f	[3,12,e]
20 comando: f	[4,12,e]
21 comando: o	[4,12,s]
22 comando: a	[4,12,e]
23 comando: a	[4,12,n]
24 comando: f	[4,13,n]
25 comando: f	[4,14,n]
26 comando: f	[4,15,n]
27 comando: f	[4,16,n]
28 comando: o	[4,16,e]
29 comando: f	[5,16,e]
30 comando: f	[6,16,e]
31 comando: f	[7,16,e]
32 comando: f	[8,16,e]
arrivo	[8,16,e]

Ricapitolando i due percorsi sono:

[[8,8],[7,8],[6,8],[6,9],[6,10],[6,9],[6,8],[6,7],[6,6],[6,5],[6,4],[5,4],[6,4],[7,4],[8,4],[9,4],[10,4],[10,5],[10,6],[10,7],[9,7],[8,7]]

[[9,8],[8,8],[7,8],[6,8],[5,8],[4,8],[4,9],[4,10],[3,10],[3,11],[3,12],[2,12],[3,12],[4,12],[4,13],[4,14],[4,15],[4,16],[5,16],[6,16],[7,16],[8,16]]

È facile vedere che (solamente) [6,8], [7,8] e [8,8] appartengono a entrambe i percorsi.

ESERCIZIO 3

PROBLEMA

Nel seguente testo sostituire a X1, X2, ecc. la parola più appropriata, scelta tra quelle proposte. (N.B. solo una scelta è *coerente* col significato generale del testo, anche se altre sono sintatticamente possibili; per svolgere l'esercizio non è necessario conoscere l'argomento trattato nel brano).

L'enorme sviluppo della X1 nei vent'anni seguiti alla seconda guerra mondiale ha avuto, per lo più, ben poco a che vedere con le scienze della X2, ed è stato stimolato nella massima parte da problemi sorti all'interno della stessa X1; tuttavia durante quello stesso periodo si sono notevolmente moltiplicate le applicazioni della X1 alla fisica e alle altre scienze naturali. Questa apparente X3 sembra avere una facile spiegazione: non solo nella X1, ma anche nello studio della X2, l'astrazione e la individuazione di schemi e strutture hanno svolto un ruolo sempre più importante. Pertanto anche oggi che il pensiero matematico ha raggiunto un grado così elevato di iperstrazione, la X1 continua ad essere il linguaggio della scienza, così come lo era stato nell'antichità. Che esista un'intima X4 tra i fenomeni X6 e le strutture matematiche, sembra essere pienamente X5 nel modo più inaspettato dalle recenti scoperte della fisica contemporanea, anche se le ragioni profonde di questa corrispondenza rimangono oscure.

Lista delle scelte:

- |                 |                |
|-----------------|----------------|
| A natura        | M confutato    |
| B comunicazione | N somiglianza  |
| C cultura       | O chimica      |
| D connettività  | P spirituali   |
| E connessione   | Q anomalia     |
| F didattica     | R confermato   |
| G empirici      | S matematica   |
| H conoscenza    | T suggerito    |
| I differenza    | U comprensione |
| L fisica        | V sperimentali |
| K materiali     | Z soddisfatto  |

Indicare le scelte con la lettera maiuscola corrispondente.

X1	
X2	
X3	
X4	
X5	
X6	

SOLUZIONE

X1	S
X2	A
X3	Q
X4	E

X5	R
X6	V

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

<b>Variabile</b>	<b>Presumibili proprietà grammaticali o sintattiche</b>	<b>Scelte possibili</b>	<b>Scelta corretta</b>
X1	sostantivo femminile	natura, comunicazione, cultura, connettività, connessione, didattica, conoscenza, differenza, fisica, somiglianza, chimica, anomalia, matematica, comprensione	matematica (più naturale nel contesto, in cui appare 5 volte)
X2	sostantivo femminile	natura, comunicazione, cultura, connettività, connessione, didattica, conoscenza, differenza, fisica, somiglianza, chimica, anomalia, matematica, comprensione	natura (unica scelta coerente col contesto e con “le altre scienze naturali”)
X3	sostantivo femminile	natura, comunicazione, cultura, connettività, connessione, didattica, conoscenza, differenza, fisica, somiglianza, chimica, anomalia, matematica, comprensione	anomalia (unica scelta coerente col contesto)
X4	sostantivo femminile	natura, comunicazione, cultura, connettività, connessione, didattica, conoscenza, differenza, fisica, somiglianza, chimica, anomalia, matematica, comprensione	connessione (unica scelta naturale nel contesto: somiglianza non è naturale)
X5	participio passato	confutato, confermato, suggerito, soddisfatto	confermato (suggerito si deve escludere per la presenza di “pienamente”)
X6	aggettivo plurale	materiali, empirici, spirituali, sperimentali	sperimentali (in coerenza con “scoperte della fisica contemporanea”)

ESERCIZIO 4

PREMESSA

In un foglio a quadretti è disegnato un campo di gara di dimensioni 14x5 (14 quadretti in orizzontale e 5 in verticale, vedi figura).

		Q												
		5	■	■		■			S					
			7	P										
		1												
♠														

Ogni casella può essere individuata da due numeri (interi); per esempio la casella contenente P è individuata da essere nella quinta colonna (da sinistra) e nella terza riga (dal basso): brevemente si dice che ha *coordinate* [5,3]; la prima coordinata (in questo caso 5) si dice *ascissa* e la seconda (in questo caso 3) si dice *ordinata*. Le coordinate della casella contenente S sono [10,4] e di quella contenente il robot ♠ sono [1,1].

Il robot si muove a passi e ad ogni passo (o mossa) può spostarsi solo in una delle caselle contenenti ♠ come illustrato nella seguente figura (allo stesso modo del *cavallo* nel gioco degli scacchi).

	♠		♠	
♠				♠
		♠		
♠				♠
	♠		♠	

Il campo di gara contiene caselle interdette al robot (segnate da un quadrato nero) quindi, tenuto conto anche dei bordi del campo di gara, la mobilità del robot può essere limitata; ad esempio se il robot si trovasse nella casella in cui c'è Q si potrebbe spostare solo in 3 caselle; se fosse nella casella in cui c'è P avrebbe 7 mosse possibili; dalla casella [1,1] ha solo 2 mosse possibili. In alcune caselle sono posti dei premi che il robot può accumulare lungo un percorso. I premi sono descritti fornendo le coordinate della casella che lo contiene e il valore del premio: i premi sopra riportati sono descritti dalla seguente lista [[3,2,1],[4,3,7],[3,4,5]]. Un percorso del robot è descritto dalla lista delle coordinate delle caselle attraversate. Un possibile percorso da P (coordinate [5,3]) a Q (coordinate [3,5]) è descritto dalla seguente lista: [[5,3],[3,2],[5,1],[4,3],[3,5]] e ha un totale di premi accumulati pari a 8.

PROBLEMA

In un campo di gara di dimensioni 5x5 il robot si trova in [1,1]; deve fare un percorso *chiuso*, cioè partire dalla casella iniziale e ritornarci, e *semplice*, cioè senza passare due volte in una stessa casella (quindi tutte le caselle del percorso sono diverse, tranne la partenza e l'arrivo); nel campo sono presenti le caselle interdette descritte dalla seguente lista

$$[(1,4),(2,1),(3,4),(4,1),(2,4),(1,5),(3,3),(3,5),(5,1)].$$

I premi distribuiti nel campo di gara sono descritti dalla seguente lista

$$[(2,3,3),(2,2,5),(4,3,4),(5,3,9),(3,2,6),(3,1,1)].$$

Al robot sono, inoltre, *vietati* i movimenti che dalla sua posizione lo porterebbero nella casella contenente una X dello schema seguente:

	×		👤	
👤				👤
		👤		
👤				👤
	👤		👤	

Trovare:

- il numero N di possibili percorsi diversi chiusi e semplici;
- la lista L dei premi accumulati in questi percorsi, elencati in ordine non decrescente.

N	
L	

SOLUZIONE

N	6
L	[3,6,9,9,9,9]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Il campo di gara è mostrato nello schema seguente:

■		■		
■	■	■		
	3	■	4	9
	5	6		
	■	1	■	■

I percorsi possibili sono:

- [[1,1],[3,2],[1,3],[2,5],[4,4],[2,3],[1,1]], premio 9
- [[1,1],[3,2],[1,1]], premio 6
- [[1,1],[3,2],[4,4],[2,3],[1,1]]; premio 9
- [[1,1],[2,3],[1,1]]; premio 3
- [[1,1],[2,3],[4,4],[2,5],[1,3],[3,2],[1,1]]; premio 9
- [[1,1],[2,3],[4,4],[3,2],[1,1]]; premio 9

ESERCIZIO 5

PREMESSA

Alcuni ragazzi decidono di costruire un ipertesto multimediale sugli avvenimenti storici significativi della loro regione. Per organizzare il progetto, dividono il lavoro in singole attività e assegnano ogni attività a un gruppo di loro.

Le attività sono descritte col seguente termine

$a(\langle \text{sigla attività} \rangle, \langle \text{durata in giorni} \rangle, \langle \text{ragazzi impegnati} \rangle)$ ;

esempio, il termine  $a(A1,1,6)$  significa che l'attività A1 dura un giorno e impiega 6 ragazzi.

Le attività non possono svolgersi tutte contemporaneamente, ma devono essere rispettate delle priorità descritte con termini del tipo

$p(\langle \text{precedente} \rangle, \langle \text{successiva} \rangle)$ ;

come per esempio  $p(A4,A8)$  e  $p(A6,A8)$ ; ogni termine esprime il fatto che l'attività associata alla sigla di destra (detta successiva) può iniziare solo quando l'attività associata alla sigla di sinistra (detta precedente) è terminata. Ovviamente se una attività ha più precedenti, può iniziare solo quando *tutte* le precedenti sono terminate; i due termini appena visti implicano che l'attività A8 può iniziare solo dopo che sono terminate le due attività A4 e A6.

N.B. Si dice *prima attività* del progetto quella che non ha precedenti; si dice *ultima attività* del progetto quella che non ha successive; in un progetto "ben fatto" sono uniche.

PROBLEMA.

Le attività di questo progetto sono descritte nella seguente lista:

$[a(A1,1,3), a(A2,2,2), a(A3,2,3), a(A4,2,1), a(A5,1,1), a(A6,2,4), a(A7,2,2), a(A8,2,3), a(A9,2,6), a(A10,1,4), a(A11,1,3), a(A12,1,3), a(A13,2,7), a(A14,2,1), a(A15,1,2), a(A16,2,1), a(A17,1,1), a(A18,1,3)]$ .

Le priorità sono descritte dalla seguente lista:

$[p(A1,A2), p(A1,A3), p(A2,A4), p(A2,A5), p(A3,A6), p(A3,A7), p(A4,A8), p(A5,A8), p(A5,A15), p(A6,A12), p(A7,A11), p(A7,A10), p(A9,A12), p(A6,A13), p(A11,A14), p(A10,A14), p(A13,A18), p(A12,A18), p(A3,A5), p(A8,A9), p(A14,A18), p(A1,A17), p(A17,A7), p(A3,A16), p(A16,A11), p(A15,A12)]$ .

Si supponga che ogni attività inizi *prima possibile* (nel rispetto delle priorità); determinare:

- il numero N di giorni necessari per completare il progetto
- numero massimo AP di attività che, così, si svolgono in parallelo
- numero minimo MB di ragazzi necessari per realizzare il progetto appena pianificato.

Si dice *percorso* (o *cammino*) *critico* una lista di attività tali che:

- la prima della lista è la prima attività del progetto;
- l'ultima della lista è l'ultima attività del progetto;
- ogni attività è successiva (nel senso delle priorità descritte dalla lista data) a quella che la precede nella lista e inizia quando quest'ultima finisce.

Determinare la lista CP dei percorsi critici.

N.B. Se non ci fossero percorsi critici allora CP sarebbe la lista vuota:  $[\ ]$ ; se ci fosse un solo percorso critico CP avrebbe un solo elemento, per esempio:  $[[A1,A2,A4,A15]]$ ; se ci fossero due percorsi critici CP avrebbe due elementi, per esempio:  $[[A1,A2,A4,A15],[A1,A8,A7,A10,A15]]$  e così via.

N	
AP	
MB	
CP	

SOLUZIONE

N	11
AP	5
MB	17
CP	[[A1,A2,A4,A8,A9,A12,A18]]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

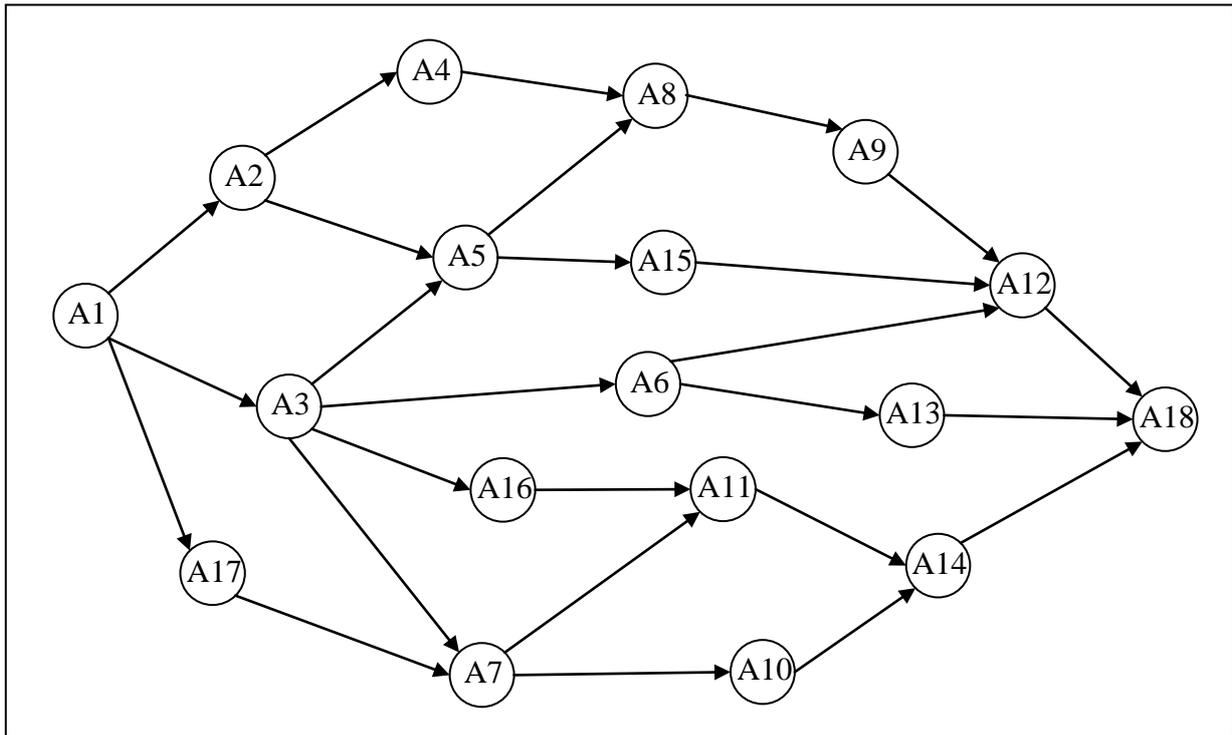
Per facilitare la soluzione è utile trasformare in tabella la lista che descrive la durata e le persone relative ad ogni attività.

Attività	Durata	Ragazzi
A1	1	3
A2	2	2
A3	2	3
A4	2	1
A5	1	1
A6	2	4
A7	2	2
A8	2	3
A9	2	6
A10	1	4
A11	1	3
A12	1	3
A13	2	7
A14	2	1
A15	1	2
A16	2	1
A17	1	1
A18	1	3

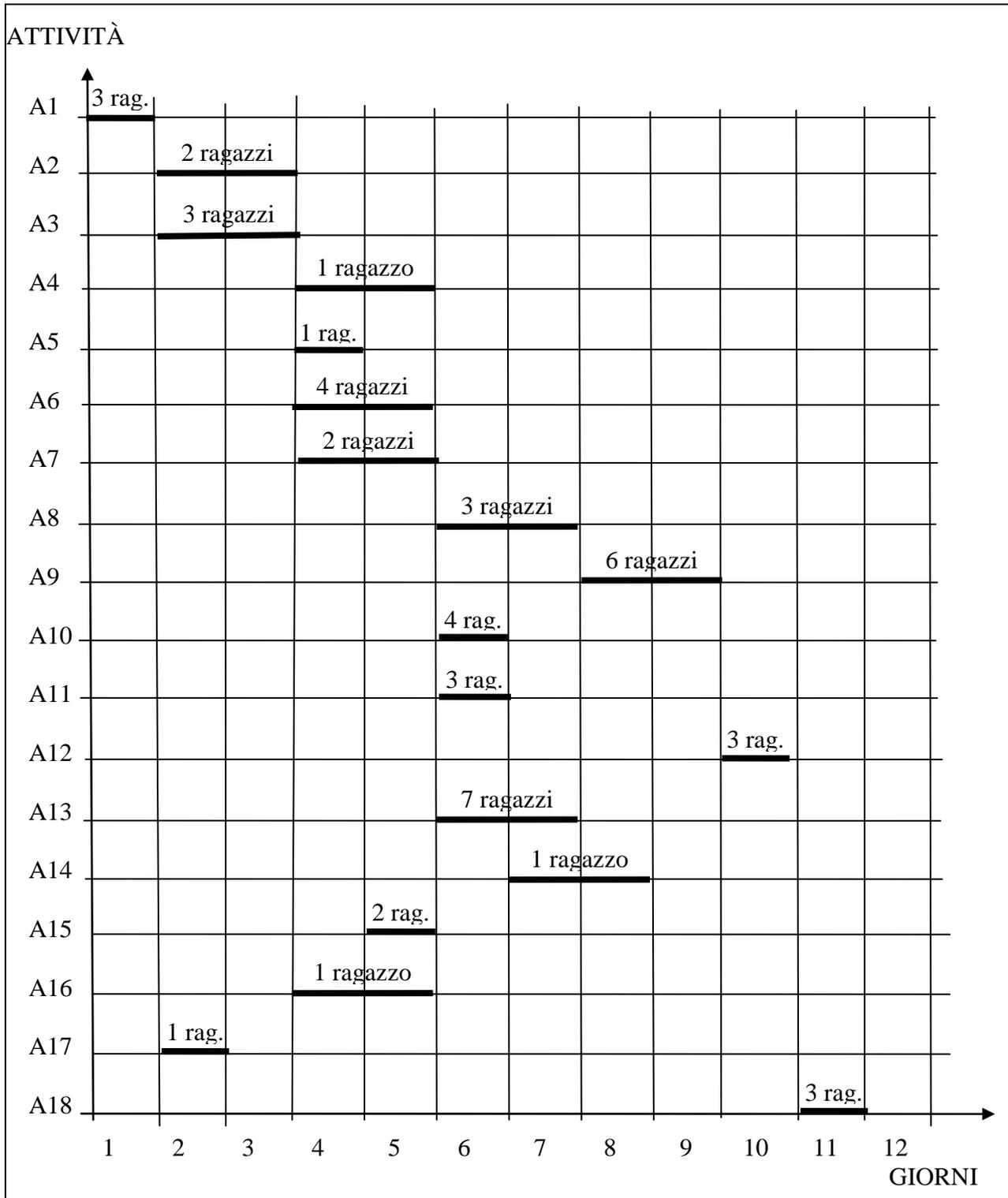
Successivamente è bene disegnare il diagramma delle precedenze, cioè il grafo che ha come nodi le attività e come frecce le precedenze. Si procede per passi successivi: prima si disegnano in “ordine sparso” dei nodi con etichette che sono le attività (per esempio un cerchietto con la sigla della attività); poi si congiungono con una freccia i nodi che appartengono a un elemento (sottolista) della lista che rappresenta le priorità; successivamente si procede a ridisegnare, per tentativi, il grafo cercando di “disintrecciare” le frecce: di solito ci si riesce completamente, come nell’esempio in figura (ma non sempre è possibile). Si noti che esiste una “prima attività” del progetto (A1 in figura) e una “ultima attività” (A18 in figura).

N.B. È casuale che la prima attività abbia la sigla più piccola e l’ultima la sigla più grande.

Il diagramma delle precedenze esprime in maniera molto “leggibile” la precedenza tra le attività e consente di passare con facilità allo stadio successivo.



Dal grafo e dalla tabella si può compilare il Gantt; si elencano le attività sull'asse verticale, avendo cura di iniziare (dall'alto) con la prima attività e finire in basso con l'ultima; sull'asse orizzontale si elencano i giorni: *a priori* non si può dire quanti saranno necessari (certamente non più della somma di quelli che compaiono nella tabella che descrive le attività).



N.B. I giorni sono numerati a partire dal primo del progetto.

Dal Gantt si deduce facilmente che N vale 11, AP vale 5 (il quarto e il quinto giorno si svolgono 5 attività), il numero minimo di ragazzi per realizzare il progetto così pianificato è 17 (quelli che devono lavorare il sesto giorno). Esiste un solo percorso critico e CP vale [[A1,A2,A4,A8,A9,A12,A18]].

ESERCIZIO 6

PROBLEMA

Compresa la sequenza dei calcoli descritti nella procedura seguente, eseguire le operazioni indicate utilizzando i dati di input sotto riportati e trovare i valori di output.

```

procedura PROVA1;
variables A, B, K, I integer;
for I from 1 to 3 step 1 do
    input A, B;
    K ← 0;
    while A>B do
        K ← K + 1;
        B ← B + I × K;
    endwhile;
    output B, K;
endfor;
endprocedura;
    
```

Completare la seguente tabella con i valori di output

valore di I	input per A	input per B	output per B	output per K
1	30	10		
2	40	20		
3	60	15		

SOLUZIONE

valore di I	input per A	input per B	output per B	output per K
1	30	10	31	6
2	40	20	40	4
3	60	15	60	5

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Il ciclo “for” viene ripetuto 3 volte, con I che vale rispettivamente 1, 2, 3.

Quando I vale 1, il ciclo “while” viene ripetuto 6 volte: K vale 6 e B vale  $10+1+2+3+4+5+6 = 31$ ;

Quando I vale 2, il ciclo “while” viene ripetuto 4 volte: K vale 4 e B vale  $20+2+4+6+8 = 40$ ;

Quando I vale 3, il ciclo “while” viene ripetuto 5 volte: K vale 5 e B vale  $15+3+6+9+12+15 = 60$ .

ESERCIZIO 7

PREMESSA

Nello pseudolinguaggio oltre al tipo “integer” che descrive variabili che hanno valore intero, esiste anche il tipo “real”, che descrive variabili che hanno valore razionale: un tale valore si può pensare come un numero (in rappresentazione decimale) “con il punto”. In alcuni linguaggi di programmazione è usato il termine “float” invece di “real”.

N.B. Si segue la convenzione anglosassone di scrivere i numeri decimali col “.” e non con la “,”.

Il seguente programma illustra alcuni esempi di utilizzo di variabili di tipo “integer” e “real”.

```

Procedure ESEMPIO
variables I, N, M integer;
variables A, B, C, D real;
I ← 2;
M ← 5;
A ← 2.0;
B ← 5.0;
N ← M/I;
C ← B/A;
D ← 3*(B+I)/M;
output N, C, D;
    
```

Al termine della esecuzione si ha:  $N = 2$ ,  $C = 2.5$ ,  $D = 4.2$ ; se in una espressione sono presenti variabili “integer” e variabili “real”, tutte le valutazioni delle operazioni sono di tipo “real”.

PROBLEMA

Compresa la sequenza dei calcoli descritti nella procedura seguente, eseguire le operazioni indicate utilizzando i dati di input sotto riportati e trovare i valori di output.

```

procedure PROVA2;
variables N integer;
variables A, B, Q, R real;
input A, B;
input N;
for I from 1 to N step 1 do
    Q ← A - B + 4;
    R ← A + B - 3;
    A ← Q;
    B ← R;
    output R;
endfor;
endprocedure;
    
```

Con i seguenti valori di input: 10 per N, 0.0 per A e 1.0 per B, calcolare i valori di output per R corrispondenti ai valori di I riportati in tabella

I	R
5	
10	

SOLUZIONE

I	R
5	28.0
10	-92.0

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Il ciclo “for” viene ripetuto 10 volte; i valori delle variabili sono riportati nella seguente tabella (naturalmente i valori per I, Q ed R non sono definiti prima del ciclo).

	I	A	B	Q	R
prima del ciclo “for”	\	0.0	1.0	\	\
dopo la prima esecuzione del ciclo “for”	1	3.0	-2.0	3.0	-2.0
dopo la seconda esecuzione del ciclo “for”	2	9.0	-2.0	9.0	-2.0
dopo la terza esecuzione del ciclo “for”	3	15.0	4.0	15.0	4.0
dopo la quarta esecuzione del ciclo “for”	4	15.0	16.0	15.0	16.0
dopo la quinta esecuzione del ciclo “for”	5	3.0	28.0	3.0	28.0
dopo la sesta esecuzione del ciclo “for”	6	-21.0	28.0	-21.0	28.0
dopo la settima esecuzione del ciclo “for”	7	-45.0	4.0	-45.0	4.0
dopo la ottava esecuzione del ciclo “for”	8	-45.0	-44.0	-45.0	-44.0
dopo la nona esecuzione del ciclo “for”	9	3.0	-92.0	3.0	-92.0
dopo la decima esecuzione del ciclo “for”	10	99.0	-92.0	99.0	-92.0

ESERCIZIO 8

PROBLEMA

Sia  $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots$  la successione *infinita di numeri naturali* definita dalle seguenti due relazioni

$$\begin{aligned} c_1 &= 6 \\ c_{n+1} &= c_n / 2 && \text{se } c_n \text{ è pari,} \\ &= 3c_n + 1 && \text{se } c_n \text{ è dispari.} \end{aligned}$$

Da un certo punto in poi questa successione entra in un ciclo lungo tre, cioè esiste un  $k$  tale che:

$$\begin{aligned} c_k &= c_{k+3}, \\ c_{k+1} &= c_{k+4}, \\ c_{k+2} &= c_{k+5}. \end{aligned}$$

Si determini:

- il minimo valore  $k$  per il quale la successione entra in questo ciclo;
- quanto valgono  $c_k, c_{k+1}, c_{k+2}$ .

k	
$c_k$	
$c_{k+1}$	
$c_{k+2}$	

SOLUZIONE

k	7
$c_k$	4
$c_{k+1}$	2
$c_{k+2}$	1

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

I primi termini della successione sono:

$$\begin{aligned} c_1 &= 6 \\ c_2 &= 3 \\ c_3 &= 10 \\ c_4 &= 5 \\ c_5 &= 16 \\ c_6 &= 8 \\ c_7 &= 4 \\ c_8 &= 2 \\ c_9 &= 1 \\ c_{10} &= 4 \\ c_{11} &= 2 \\ c_{12} &= 1 \\ c_{13} &= 4 \\ &\dots \end{aligned}$$

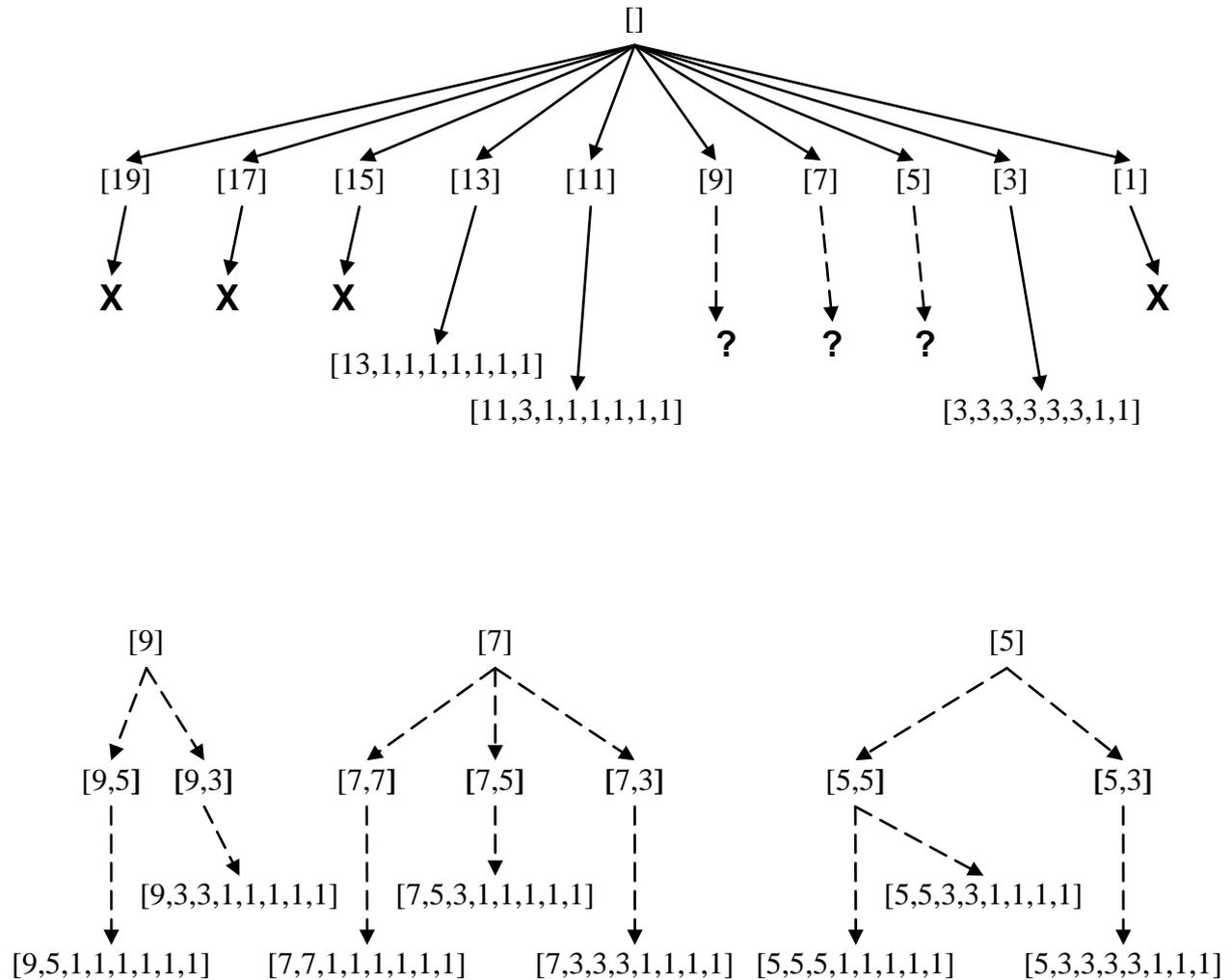
La successione si può ovviamente definire ponendo  $c_1 = p$ , per un qualsiasi  $p$  naturale; tali successioni sono state molto studiate (Ulam, Collatz, Hasse, Kakutani). Secondo la *congettura di Collatz*, per ogni  $p$  la successione raggiunge il valore 1 (e quindi entra nel solito ciclo 1,4,2). La congettura è stata sperimentalmente verificata sino a  $p = 5 \times 2^{60}$ .



livello sono liste di due elementi che si ottengono aggiungendo un (altro possibile) elemento alla lista; e così via

In realtà non è necessario costruire completamente l'albero (che sarebbe enorme): si può "potarlo" in maniera da escludere *a priori* i rami che non portano a soluzioni.

Si osservi la seguente figura.



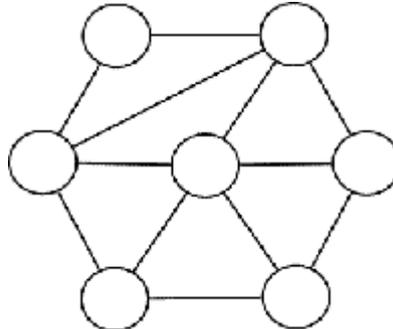
Nella parte alta è riportata la radice dell'albero e il primo livello di nodi: è chiaro che i nodi individuati con **X** non portano ad alcuna soluzione: per esempio se la lista comincia con 19 (o con 17 o 15), anche aggiungendo solamente degli "1" non si riesce a completarla con *altri 7 elementi* perché possa avere come somma 20. Analogamente, anche se per ragioni opposte, non si può completare la lista che inizia con 1.

Le liste che cominciano con 13, 11 e 3 possono essere completate in una sola maniera; le altre liste (che cominciano per 9, 7 e 5) possono essere completate in più modi, come mostrato nella parte bassa della figura.

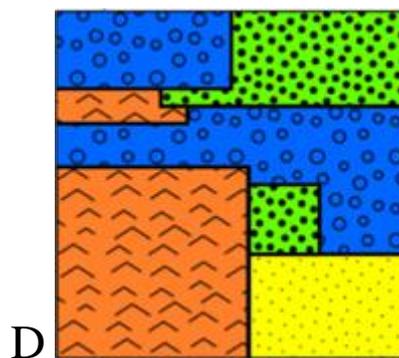
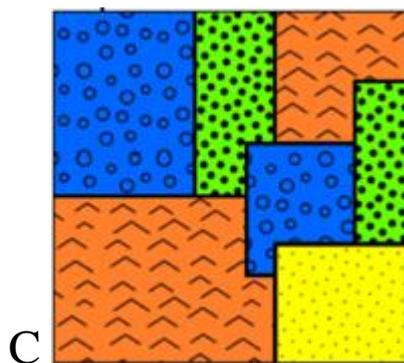
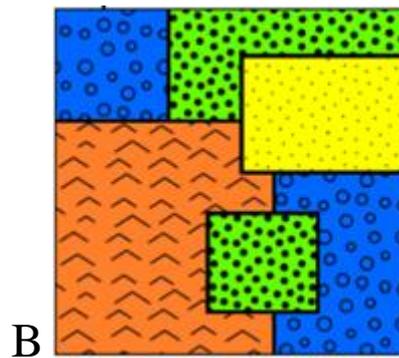
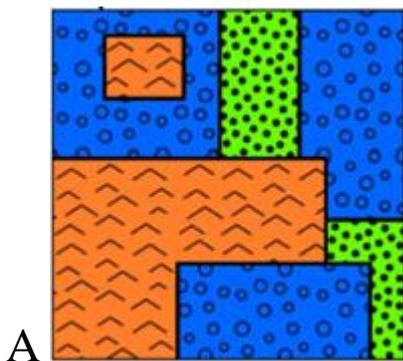
ESERCIZIO 10

PROBLEMA

Maps can be easily pictured as graphs. In such a graph every node is a country and the lines between the nodes mean that they border each other.



The above picture shows a graph of a map with seven countries. Jim has to find a map that fits the given graph. He has four options. Can you help him find a map that matches the graph?



Enter your answer (A or B or C or D) in the following box.

SOLUZIONE

**COMMENTI ALLA SOLUZIONE**

A e B si escludono facilmente: B ha solamente 6 regioni e A ha una regione che confina solo con un'altra; in D le cinque regioni che confinano con quella "centrale" (di colore blu scuro) non formano circuito (non si può passare da una ad un'altra, attraversando la frontiera, e ritornare a quella di partenza, avendole toccate tutte).