

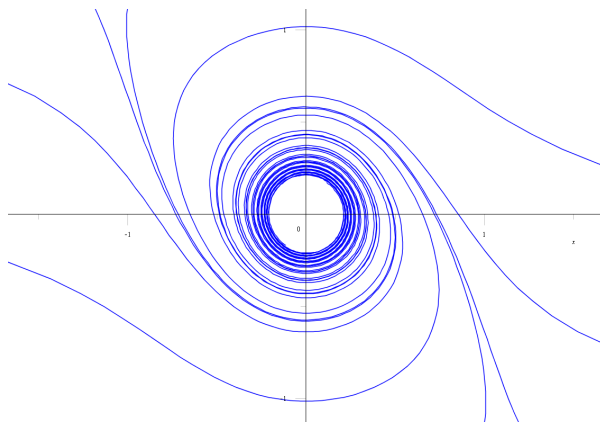
## Biforcazioni di Hopf.

Abbiamo visto che cosa succede nel sistema di van der Pol (8) all'aumentare del valore del parametro. Ora procediamo nel verso opposto: cerchiamo di capire come cambia il comportamento del sistema (8) man mano che  $R$  diminuisce da 1 a  $-1$  ( $\Omega$ ). Finché  $R$  rimane positivo, il circuito oscilla: quindi, sotto l'aspetto del movimento, ovvero del cambiamento di stato, si può dire che rimanga "vivo". Ammette un'unica soluzione periodica (non nulla), che costituisce un ciclo limite verso il quale sono attratte *tutte* le soluzioni che partono da condizioni iniziali non entrambe nulle. L'origine è un punto di equilibrio comunque instabile: una soluzione che parte vicino ad essa cresce fino a tendere al ciclo limite.

Nessun sistema lineare può esibire qualche ciclo limite. D'altra parte, nei sistemi autonomi bidimensionali (cioè con due variabili di stato), a tempo continuo, se una traiettoria è confinata in una regione del piano delle fasi che sia chiusa e limitata e che non contenga alcun punto di equilibrio, allora questa traiettoria deve prima o poi tendere a un'orbita (chiusa): in due dimensioni non può accadere nulla di più complicato (ad esempio, un comportamento caotico)! Vi possono però essere diversi cicli limite, dal differente comportamento: *attrattivo* (come nel caso in esame), *repulsivo* (vicino ad esso, da entrambe le parti, le traiettorie si allontanano) o, in casi eccezionali, *semistabile* (da una parte le traiettorie sono attratte, dall'altra respinte).

Torniamo al nostro sistema. Via via che  $R$  scende verso lo zero, l'orbita limite si restringe attorno all'origine, diventando sempre più piccola...

Che cosa succede quando  $R = 0$ ? Il componente resistivo diventa passivo (non vi è più alcun tratto della sua caratteristica nel secondo o nel quarto quadrante) e pertanto il circuito "muore", sebbene assai lentamente: infatti, da valori piccoli, la corrente e le tensioni scendono tutte a zero, con un lungo transitorio. Nel piano delle fasi, tutte le traiettorie tendono all'origine, ma quando vi giungono in prossimità vi girano intorno, in un lento vortice che via via si restringe, come si può osservare in figura.



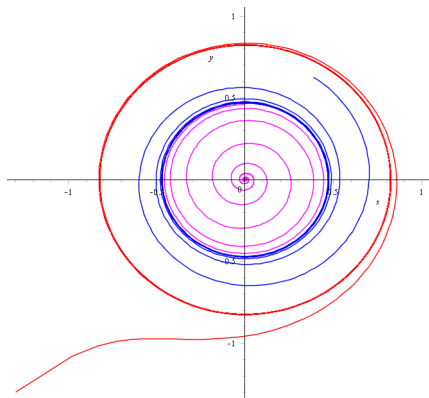
Comunque l'origine diventa un attrattore: può così essere classificata come punto di equilibrio asintoticamente stabile, e ciò vale anche per valori di  $R$  negativi. Si provi a scendere fino a  $-1$ , verificando che l'origine è un fuoco stabile (o pozzo a spirale).

In conclusione: quando il parametro  $R$  attraversa lo zero, si verifica una transizione (continua) tra due diverse situazioni; pur mantenendo un solo punto di equilibrio (l'origine), il sistema cambia comportamento: per valori di  $R$  minori o uguali a zero l'origine è stabile, mentre per valori positivi essa perde la stabilità e nasce un ciclo limite attrattivo. Questo fenomeno è noto come *biforcazione di Hopf*, dal nome del matematico e astronomo austriaco Eberhard F. Hopf (1902-1982); per il sistema in esame, col solo parametro  $R$ , il valore 0 è dunque un *punto di biforcazione*.

Giacché è stato menzionato, vediamo un caso in cui può nascere anche un ciclo limite repulsivo. Consideriamo il *sistema di Bautin* (in due dimensioni):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - y - x(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - b) \\ \frac{dy}{dt} = ay + x - y(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - b) \end{cases}$$

con i due parametri  $a$  e  $b$ . L'origine è l'unico punto di equilibrio. Se fissiamo  $a = -0.15$  e  $b = 0.9$ , potremo osservare due cicli limite circolari, con centro nell'origine, entrambi di periodo  $2\pi$ : uno attrattivo di raggio  $\cong 0.824$  e uno repulsivo, più interno, di raggio  $\cong 0.470$ , mentre l'origine è un fuoco stabile. Nella seguente figura, ottenuta con Maple, sono mostrate tre traiettorie, tutte percorse in senso antiorario, per 45 unità di tempo: quelle in rosso e in blu, che iniziano dai punti  $(-1.3, -1.3)$  e  $(0.47, 0)$  rispettivamente, vanno verso il ciclo attrattivo, mentre quella di color magenta inizia dal punto  $(0, 0.46)$  ed è attratta dall'origine.



Al diminuire di  $a$ , i due cicli si restringono e, quando  $a = -0.2025$ , collassano nell'origine, che rimane un fuoco stabile. Invece, all'aumentare di  $a$ , aumenta anche il raggio del ciclo attrattivo, mentre quello del ciclo repulsivo diminuisce e, quando  $a = 0$ , si annulla e l'origine diviene un fuoco instabile. Si verifichi, ad esempio, che quando  $a = 0.3$  il raggio del ciclo attrattivo è  $\cong 1.08$  (ma il periodo dei cicli limite è sempre  $2\pi$ ). Si provi infine a vedere che cosa succede fissando a zero uno dei due parametri, variando l'altro da un valore negativo a uno positivo.

Quale ultimo caso di studio, nuovamente meno astratto, riprendiamo i problemi 10 e 11 (*cfr.* i testi a p. 33, lasciati da risolvere) e apportiamo entrambe le modifiche ivi proposte al modello prede-predatori (5). Otteniamo così il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \alpha \left( 1 - \frac{x}{X} \right) x - \rho \frac{xy}{1 + \sigma x} \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \rho \frac{xy}{1 + \sigma x} \end{array} \right.$$

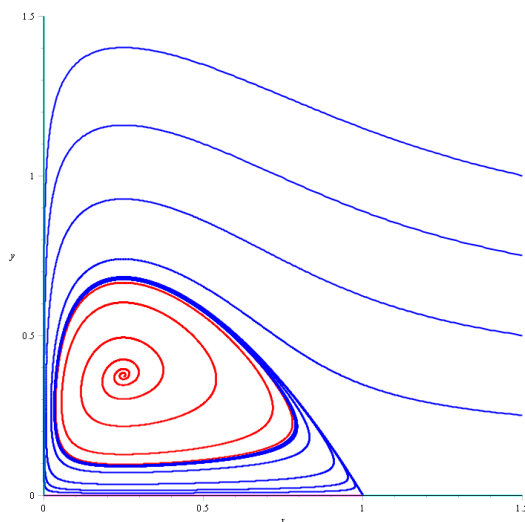
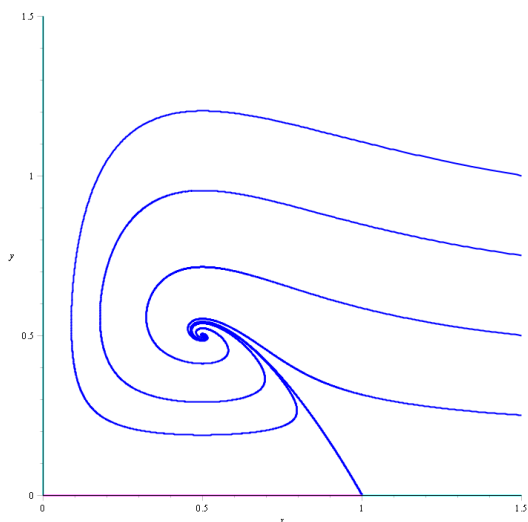
con cinque parametri, tutti positivi:  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $X$ . Per semplicità, e poiché basta per il nostro scopo, fissiamo  $\alpha = X = 1$ ,  $\gamma = 0.5$  e  $\rho = \sigma = p$ ; in tal modo, ci riduciamo ad avere un solo parametro (positivo):  $p$ . Ricordiamo che nei modelli prede-predatori ha senso considerare soltanto il primo quadrante, semiassi compresi.

Quando  $p > 1$ , si hanno tre punti di equilibrio:  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ , che sono punti sella, e  $(1/p, 2 \cdot (p-1)/p^2)$ , che può essere un pozzo o una sorgente a seconda del valore di  $p$ .

Nella figura qui sotto sono riportati due quadri di stato ottenuti con Maple. Quello a sinistra mostra, per  $p = 2$ , le seguenti traiettorie (per 100 unità di tempo):

- in magenta: a partire da  $(0.001, 0)$ , attratta verso  $(1, 0)$ ;
- in azzurro: a partire da  $(1.5, 0)$ , attratta pur'essa verso  $(1, 0)$ , e a partire da  $(0, 1.5)$ , attratta verso l'origine;
- in blu: a partire da  $(1, 0.001)$ ,  $(1.5, 0.25)$ ,  $(1.5, 0.5)$ ,  $(1.5, 0.75)$ ,  $(1.5, 1)$ , tutte attratte verso il terzo punto di equilibrio, che in questo caso è un fuoco stabile in  $(0.5, 0.5)$ .

Nel quadro a destra sono visibili le traiettorie, a partire dagli stessi stati iniziali e per lo stesso tempo, quando  $p = 4$ : ora c'è anche un ciclo limite attrattivo e il terzo punto di equilibrio, in  $(0.25, 0.375)$ , è un fuoco instabile, come evidenzia la traiettoria qui aggiunta (in rosso) che parte vicino a tale punto, precisamente da  $(0.25, 0.37)$ .



In effetti, all'aumentare di  $p$  da 2 a 4, a un certo punto si verifica una biforcazione e nasce un ciclo limite... Non pretendiamo che lo studente scopra tale punto, quanto piuttosto che noti la profonda differenza tra questo sistema e il classico modello prede-predatori visto prima, che giustifichi la posizione dei tre punti di equilibrio, e che infine indaghi su che cosa succede quando  $0 < p \leq 1$ .

Prima di chiudere, diamo ancora allo studente qualche spunto per ulteriori ricerche e interessanti applicazioni.

Nel 1952, A. L. Hodgkin e A. F. Huxley pubblicarono alcuni articoli nei quali presentarono i risultati di una serie di esperimenti da loro fatti per capire come fluisce la corrente elettrica attraverso la membrana dell'*assone gigante* del neurone del calamaro, e definirono un sistema di equazioni (con relativo modello circuitale) per spiegare il particolare movimento degli ioni (principalmente di potassio e di sodio) che conduce all'insorgenza e alla propagazione dei potenziali d'azione nei tessuti nervosi. Per queste loro scoperte, ricevettero il premio Nobel nel 1963.

Nel 1961, Richard FitzHugh propose una semplificazione in due dimensioni del sistema di Hodgkin e Huxley, che tuttavia modellasse la generazione degli impulsi in un neurone eccitato; il circuito equivalente fu realizzato l'anno successivo da J. Nagumo e altri. Per illustrare le proprietà di base dell'eccitabilità di un neurone – che sostanzialmente esprime un'attività elettrica – come esibite dalle più complesse equazioni di Hodgkin e Huxley, FitzHugh partì proprio dal sistema di van der Pol e giunse alla seguente formulazione:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - \frac{1}{3}x^3 - y + I \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{13}(x + 0.7 - 0.8y) \end{cases}$$

Rispetto alle equazioni di van der Pol, riscritte per opportune scelte dei componenti, al secondo membro della seconda equazione è stato aggiunto un termine costante e sottratto un termine proporzionale a  $y$ , mentre al secondo membro della prima è sommato lo *stimolo esterno*  $I$ . Se tale stimolo supera un certo valore di soglia, il modello esibirà un caratteristico impulso (nervoso) prima che le grandezze elettriche  $x$  e  $y$  ritornino ad adagiarsi sui loro valori di riposo;  $x$  rappresenta il potenziale di membrana, mentre  $y$  tiene conto del recupero del neurone dall'eccitazione, dovuto ai processi fisiologici che avvengono all'interno della cellula.

Si osservi che l'origine *non* è un punto di equilibrio, indipendentemente dal valore di  $I$ . Si provi a vedere, ad esempio, che cosa succede quando  $I$  assume (costantemente nel tempo) i valori 0.2, 0.32 e 0.34.

Un altro campo in cui certi fenomeni possono essere descritti da sistemi dinamici del tipo visto è quello della chimica. Non soltanto in quella studiata da Lotka, ma anche in altre reazioni chimiche, le concentrazioni possono manifestare un comportamento oscillatorio; ne suggeriamo qui di seguito due esempi.

La glicolisi è un processo biochimico fondamentale, comune al metabolismo di tutti gli esseri viventi, mediante il quale le cellule ottengono energia dalla demolizione delle molecole del glucosio. Un semplice modello cinetico, che ne riproduce le auto-oscillazioni, è stato proposto nel 1967 da E. E. Sel'kov:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + ay + x^2y \\ \frac{dy}{dt} = b - ay - x^2y \end{cases}$$

con parametri positivi  $a$  e  $b$ ; le variabili di stato  $x$  e  $y$  rappresentano le concentrazioni di due diversi fosfati in funzione del tempo. Limitando l'analisi a un quadrato con lato di poche unità nel primo quadrante del piano delle fasi, per un tempo di una sessantina di unità, avendo fissato  $a = 0.08$ , si simuli il comportamento di questo sistema per  $b = 0.2, 0.6$  e  $1.0$ , e se ne traggano le conclusioni.

Un'altra reazione chimica "oscillante" è prodotta da diossido di cloro, iodio e acido malonico; nel 1990, I. Lengyel, G. Rábai e I. R. Epstein ne hanno dato un modello semplificato in due dimensioni:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - x - \frac{4xy}{1+x^2} \\ \frac{dy}{dt} = bx \left( 1 - \frac{y}{1+x^2} \right) \end{cases}$$

con due parametri positivi,  $a$  e  $b$ ;  $x$  e  $y$  rappresentano le concentrazioni di ioni intermedi (negativi) di iodio e di diossido di cloro, rispettivamente. Fissando  $a = 10$ , si consiglia di studiarne il comportamento nella regione con  $x$  tra 0 e 5 e  $y$  tra 0 e 10 – tracciando, ad esempio, le traiettorie che partono dagli stati iniziali (0, 2) e (3, 2) e da un altro stato in prossimità del punto di equilibrio (2, 5) – per diversi valori di  $b$ . Qui il punto di biforcazione è precisamente 3.5: per valori di  $b$  inferiori (si assuma, ad esempio,  $b = 2$ ) il sistema presenta un ciclo limite attrattivo, poi (si consideri, ad esempio,  $b = 5$ ) tale ciclo collassa in un punto di equilibrio stabile...

E così termina questo breve *excursus*, che ci ha introdotti in un settore della scienza relativamente giovane, nel cui sviluppo il computer ha avuto un'importanza fondamentale (e di certo ne avrà per le future esplorazioni), e che ci è anche servito ad apprendere l'uso di alcune funzioni di Maple, applicandole nella risoluzione dei problemi via via proposti.